DTU Bibliotek

Denne fil er downloadet fra

Danmarks Tekniske Kulturarv

www.tekniskkulturarv.dk

Danmarks Tekniske Kulturarv drives af DTU Bibliotek og indeholder scannede bøger og fotografier fra bibliotekets historiske samling.

Rettigheder

Du kan læse mere om, hvordan du må bruge filen, på *www.tekniskkulturarv.dk/about*

Er du i tvivl om brug af værker, bøger, fotografier og tekster fra siden, er du velkommen til at sende en mail til *tekniskkulturarv@dtu.dk*

654.

P. O. PEDERSEN

TELEFONLEDNINGERNES TEORI

Dansk Ingeniørforenings
Bogsamling

JUL. GJELLERUPS FORLAG KØBENHAVN

~~654~~

Dansk Ingeniørforening
Bogsamling.

621.395.7 G1

654

TELEFONLEDNINGERNES TEORI

AF

P. O. PEDERSEN

PROFESSOR VED DEN POLYTEKNISKE LÆREANSTALT

Dansk Ingeniørforenings
Bogsamling.

POLYTEKNISK
Teknisk Bibliotek
LÆREANSTALT

KØBENHAVN
JUL. GJELLERUPS FORLAG
1914

Copyright by P. O. Pedersen.
Copenhagen. 1914.

FREMMEDSPROG-TRYKKERIET „ATHENE"

Dansk Ingeniørforenings
Bogsamling.

FORORD

Denne lille Bog er nærmest bestemt til Hjælp ved Undervisningen i Svagstrømsteknik ved den polytekniske Læreanstalt. Den forudsætter Kendskab til Vekselstrømsteori og Telefonteknik. Trods sin Lidenhed indeholder den en hel Del mere, end der kræves til Eksamen, selv for »Specialisternes« Vedkommende. Naar det ikke er antydet, hvad der kan springes over, ligger det i, at der maaske i Tidens Løb vil ske Forandringer i dette Forhold; (de lidt vanskeligere Beregninger i § 16 kan dog altid springes over). Bogens Omfang er i det væsentlige bestemt af Hensynet til dens Anvendelse som Hjælpemiddel ved Konstruktionsøvelserne og som Ledetraad ved et dyberegaaende Studium af den herhen hørende, meget righoldige Litteratur. Tabellerne bag i Bogen vil formentlig være til nogen Nytte i begge Henseender.

De fleste Formler er givet baade med og uden Benyttelse af Hyperbelfunktioner; for Læsning af Litteraturen er Kendskabet til disse Funktioner ubetinget nødvendig. De vigtigste Formler vedrørende Hyperbelfunktioner findes i Tillæg III.

Næsten alle Kurver er tegnet paa Grundlag af Beregninger, og der er i Teksten givet alle nødvendige Data. En Efterregning af nogle af Kurvepunkterne vil derfor være en særdeles gavnlig Øvelse for de Læsere, der ikke er fuldt fortrolige med Emnet.

For ikke at forsinke Udgivelsen er Teorien for Kabelmaalinger ikke behandlet, en Udeladelse, der dog næppe vil føles meget, da man har de fyldige og let tilgængelige Fremstillinger af Prof. Abs. Larsen og Mag. A. K. Erlang. [I. 21b, 17b.]

At give en samlet Fremstilling af Svagstrømsteknikken vil med den rivende Udvikling, der for Tiden sker, i Øjeblikket langt overstige mine Kræfter; jeg haaber imidlertid efterhaanden at faa fremstillet korte Monografier over de vigtigste Afsnit. Det første Skridt i den Retning vil rimeligvis blive en Lærebog i Traadløs Telegrafi udgivet i Forening med mag. sc. A. W. Marke.

Elektroingeniørerne F. C. Wamberg og H. F. C. Hansen har været mig behjælpelig ved Tegningen af Figurerne, medens mag. sc. A. W. Marke har assisteret mig ved Bogens Affattelse, Beregning af Tabeller m. m. For denne Hjælp bringer jeg herved min bedste Tak.

Telegrafdirektoratets tekniske Afdeling har stillet de i Tillæg X benyttede Klicheer samt Oplysninger vedrørende danske Krarup-Kabler til Raadighed, og Telefonselskabets tekniske Afdeling har overladt mig Originalen til Fig. 34, hvorfor jeg herved bringer de nævnte Afdelinger min bedste Tak.

København, Juni 1914.

P. O. P.

Dansk Ingeniørforenings
Bogsamling.

INDHOLDSFORTEGNELSE

Oversigt over de benyttede Betegnelser ..... S. 7
Om Benyttelsen af komplekse Symboler i Vekselstrømsteorien .. - 8
Indledning ..... - 9

A. JÆVNSTRØM.

§ 1. Strøm og Spænding langs en uendelig lang, homogen Ledning. Ledningens Karakteristik ..... - 9
§ 2. Ledning med endelig Længde, forsynet med Modtageapparat. Inhomogene Ledninger. Refleksionstab ..... - 12
§ 3. Den overførte Effekt. Den fordelagtigste Modstand for Modtageapparatet ..... - 17

B. VEKSELSTRØM.

§ 4. Indledning ..... - 18
§ 5. De primære Konstanter ..... - 18
§ 6. Almindelige Ligninger for en Vekselstrøms Bevægelse gennem en lang Ledning ..... - 23
§ 7. Almindelige Bemærkninger om Telefonstrømmes Forvrængning ..... - 26
§ 8. Relationer mellem de primære og de sekundære Konstanter ..... - 28
§ 9. Tilnærmelsesformler for de sekundære Konstanter ..... - 31
§ 10. Sammensatte Ledninger. Refleksionstab ..... - 37
§ 11. Korte Ledninger. Overgangen til den stationære Tilstand - 39
§ 12. Almindelige Formler for Ledninger af vilkaarlig Længde. Impedans af Sende- og Modtageapparat ..... - 43
§ 13. Ækvivalentledere ..... - 51

C. LEDNINGER MED FORØGET SELVINDUKTION.

§ 14. Indledning ..... - 61
§ 15. Pupin-Ledninger ..... - 64
§ 16. Dæmpningskonstantens Afhængighed af Frekvensen ved Pupin-Ledninger ..... - 68
§ 17. Den mindste tilladelige Værdi af n_0. Pupin-Spolers Konstruktion og Anbringelsesmaade ..... - 72
§ 18. Krarup-Kabler ..... - 77
§ 19. Sammenligning mellem Pupin- og Krarup-Kabler ..... - 84

D. ENKELTLEDER.

§ 20. Almindelige Bemærkninger ..... S. 89

E. TELEFONI VED HJÆLP AF HØJFREKVENTE VEKSELSTRØMME.

§ 21. Almindelige Bemærkninger ..... - 90

F. STANDARD-KABEL.

§ 22. Det engelske Telefonvæsens Standard-Kabel ..... - 91

TILLÆG.

I. Litteraturfortegnelse ..... - 93
II. Komplekse Størrelser samt nogle Betegnelser fra Vekselstrømsteorien ..... - 97
III. Nogle Formler vedrørende Hyperbelfunktioner ..... - 99
IV. Hvirvelstrømstab.
a. Hvirvelstrømstab i og effektiv Modstand af retlinede, runde Metaltraade ..... - 103
b. Hvirvelstrømstab i plane Metalplader ..... - 106
c. Værdien af η for tynde Traade og Plader ..... - 106
V. Oversigt over nogle i Kabelteknikken hyppigt benyttede engelske Maal og deres Overføring til Metermaal ..... - 107
VI. Kurver over Selvinduktion og Kapacitet af Luftledninger for Intervallet $0 < D:d < 450$ ..... mellem S. 108 og - 109
VII. Tabel over Konstanter for papir-luftisolerede Blyrørskabler for $0{,}4 \leqq d \leqq 3{,}0$ mm ..... - 109
VIII. Kurver over α og Z svarende til Tabel VII ..... - 110
IX. Tabel over Konstanter for Luftledninger ..... - 112
X. Oversigt over nogle Krarup-Kabler ..... - 113

OVERSIGT OVER BETEGNELSER O. LIGN.

[II 6] henviser til Tillæg II Nr. 6.
Log betegner de sædvanlige Logaritmer med Grundtal 10.
lgn betegner de naturlige Logaritmer med Grundtallet $e = 2{,}7183$.
$a \ll b$ betegner: a meget mindre end b.
Periodiske Størrelser fremstilles saaledes:

$$e = E_m \cos(\omega t + \varphi_1), \qquad E = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot E_m = \text{eff. Spænding.}$$
$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_2), \qquad I = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot I_m = \text{eff. Strøm.}$$

Ledningens primære Konstanter er: R, L, A og C (se § 5).

$n = \dfrac{\omega}{2\pi}$ = Talestrømmens Frekvens.

$tg\,\varphi = \dfrac{\omega L}{R}$; $tg\,\psi = \dfrac{\omega C}{A}$; $\chi = \dfrac{\varphi - \psi}{2}$; $\varkappa = \dfrac{A}{\omega C}$.

Ledningens sekundære Konstanter:

$$Z = a + jb = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{j\chi} = \text{Karakteristiken.}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \cdot e^{\frac{\varphi + \psi}{2}} = \text{Vandringskonstanten.}$$

α kaldes Dæmpningskonstanten.
β kaldes Hastighedskonstanten.
v = Bølgehastighed.
λ = Bølgelængde.

$r = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ = Refleksionskoefficienten ved Overgang fra en Leder med Karakteristik Z_1 til en Leder med Karakteristik Z_2.

$\varrho_1 = \tfrac{1}{2}\, lgn \left| \left\{ \dfrac{1}{2} \left[1 + \dfrac{1}{2} \left(\dfrac{Z_1}{Z_2} + \dfrac{Z_2}{Z_1} \right) \right] \right\} \right|$ = Refleksionseksponenten.

$S = s + jq$ = Afsendeapparatets Impedans.
$M = m + jp$ = Modtageapparatets Impedans.
$Z(l, X)$ = Impedansen af en l km lang Ledning afsluttet med et Apparat med Impedans X.
s = Spoleafstand ved Pupin-Ledninger.
N = Antallet af Spoler pr. Bølgelængde.
$n_o = N \cdot n$ = det Antal Spoler, Bølgen passerer pr. Sekund.

$\eta = \dfrac{R_o}{L_o}$ = Forholdet mellem effektiv Modstand og Selvinduktion af Spoler o. lign.
ε Dielektricitetskonstant.
σ Ledningsfylde (specifik Ledningsevne).
ϱ Modstandsfylde (specifik Modstand).

Siemens = Enhed for Ledningsevne. (Amp. = Volt × Siemens.)
F = Farad; $\mu F = 10^{-6}\, F = 9 \cdot 10^5$ cm.
H = Henry = 10^9 cm.

Angaaende Betegnelser vedrørende komplekse Størrelser og Vekselstrømsteori henvises til Tillæg II samt efterfølgende Side.

OM BENYTTELSEN AF KOMPLEKSE SYMBOLER I VEKSELSTRØMSTEORIEN.

I Stedet for at regne med selve den E.M.K. $e = E_m \cos(\omega t + \varphi_1)$, der paavirker den undersøgte Leder, er det for Regningens Gennemførelse hyppigt nemmere at sætte

$$e = E_m \left(\cos(\omega t + \varphi_1) + j \sin(\omega t + \varphi_1)\right) = E_m e^{j(\omega t + \varphi_1)}, \quad \ldots\ldots \quad (1).$$

og samtidig fremstille Resultaterne i den komplekse Plan. Alle Spændinger og Strømme fremstilles da som Vektorer af konstant Længde, der alle roterer med samme Vinkelhastighed ω.

F. Eks.

$$i = I_m \left(\cos(\omega t + \varphi_2) + j \sin(\omega t + \varphi_2)\right) = I_m e^{j(\omega t + \varphi_2)}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

De forskellige Vektorer — Strømme og Spændinger — er da bestemte ved deres Længde og Fasevinkel. Vektorer af samme Art sammensættes som Kræfter.

Skrives Relationen mellem Spænding og Strøm for en eller anden Leder paa en af Formerne

$$e = Z \cdot i \qquad \text{eller} \qquad i = Y \cdot e, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).$$

kaldes Z Lederens Impedans og Y dens Admittans.

For Modstanden R Ohm i Serie med Selvinduktionen L Henry er $Z = R + j\omega L$, og for en Kondensator med Kapaciteten C Farad shuntet med Afledningen A Siemens er $Y = A + j\omega C$.

Med Impedans og Admittans regner man — efter Reglerne for Regning med komplekse Tal — ganske som man i Jævnstrømsteknikken regner med Modstand og Ledningsevne.

Alle Problemer, der er lineære med Hensyn til Strøm og Spænding — altsaa Problemer, der gaar ud paa at finde Fordeling af Strøm og Spænding i et Ledningssystem —, løses derfor formelt lige saa let for Vekselstrøm som for Jævnstrøm, kun at de indgaaende Konstanter i første Tilfælde som Regel er komplekse, i sidste reelle.

Den til den E.M.K. $e = E_m \cos(\omega t + \varphi_1)$ svarende Strøm- og Spændingsfordeling fremstilles ved de reelle Dele af de fundne Resultater, medens de imaginære Dele fremstiller den til den E.M.K. $e = E_m \sin(\omega t + \varphi_1)$ svarende Strøm- og Spændingsfordeling.

Ved ikke-lineære Problemer taber denne symbolske Fremstillingsmaade for en stor Del sin Betydning og Anvendelighed. Saaledes bestemmes Effekten paa følgende Maade: Gennemløbes en Leder af Strømmen (2) og er Klemspændingen samtidig bestemt ved (1), saa er den Lederen tilførte Effekt P bestemt ved:

$$P = \tfrac{1}{2} I_m E_m \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \tfrac{1}{2} |i| \cdot |e| \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = I E \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \ldots \quad (4).$$

Dansk Ingeniørforenings
Bogsamling.

INDLEDNING.

Paa de følgende Sider beskæftiger vi os hovedsagelig med de simpleste Forhold vedrørende en Vekselstrøms Bevægelse gennem en lang, homogen Ledning, der foruden Modstand tillige er i Besiddelse af Selvinduktion, Afledning og Kapacitet. Ledningen paavirkes ved Afsenderen af en *E. M. K.*: $e = E_m \cos \omega t$. Vi betragter i det væsentlige kun Forholdene, efter at Paavirkningen har varet saa længe, at Tilstanden er bleven stationær, og vi lægger særlig Vægt paa de Forhold, der spiller en Rolle i Telefonien.

For Simpelheds Skyld vil vi dog begynde med at betragte en Jævnstrøms Bevægelse gennem en lang, med Modstand og Afledning behæftet Ledning, der paa Sendestationen paavirkes af en konstant *E. M. K.*: *E*, idet vi forudsætter, at der er hengaaet saa lang Tid, at Tilstanden er bleven stationær.

Behandlingen af kortere og længere Strømimpulsers Vandring gennnem lange Ledninger, Telegrafledningernes Teori, frembyder store Vanskeligheder, og vi kan ikke her komme nærmere ind paa dette Forhold.*)

A. Jævnstrøm.

§ 1. *Strøm og Spænding langs en uendelig lang, homogen Ledning. Ledningens Karakteristik.*

En uendelig lang Ledning har Afledningen *A* Siemens og Modstanden *R* Ohm pr. km; ved Enkeltleding er *R* Modstanden i den enkelte Ledning, ved Dobbeltledning

*) Angaaende dette Spørgsmaal henvises til [I. 1, 2, 5, 8, 9, 25 b, 27 og 30] samt til H. W. Malcolm: Theory of the Submarine Telegraph Cable (»Electrician« Vol. 69, 1912).

Summen af de 2 Ledningers Modstand, medens A for Enkeltledning er dennes Afledning til Jord, ved Dobbeltledninger Afledningen mellem de to Ledninger. Den uendelig lange,

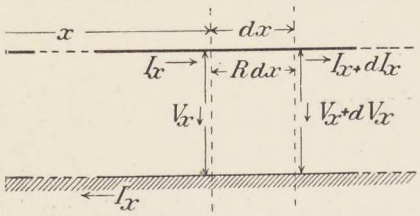


Fig. 1.

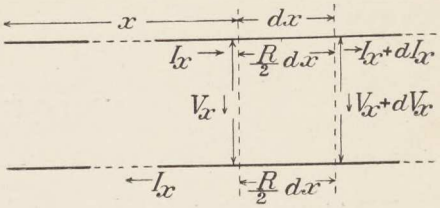


Fig. 2.

homogene Lednings Modstand Z maa være den samme i alle Ledningens Punkter, og man har derfor, idet V_x er Spændingen og I_x Strømstyrken i Punktet x (se Fig. 1 og 2):

$$V_x = Z \cdot I_x, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

eller $$d\,V_x = Z \cdot d\,I_x.$$

Man ser umiddelbart, at

$$\left.\begin{aligned} -d\,V_x &= I_x \cdot R dx \\ -d\,I_x &= V_x \cdot A dx. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2).$$

og

Divideres disse to Ligninger ind i hinanden, faas

$$\frac{d\,V_x}{d\,I_x} = Z = \frac{I_x}{V_x} \cdot \frac{R}{A} = \frac{1}{Z} \cdot \frac{R}{A},$$

hvoraf $$Z = \sqrt{\frac{R}{A}} \cdot \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Ohm.} \quad (3).$$

Z kaldes *Ledningens Karakteristik.*

Udtrykket for Karakteristiken kan ogsaa findes paa følgende Maade [I. 17 *a*]. Ledningen antages i ækvidistante Punkter at have Afledningen a Siemens; Modstanden mellem to Afledningspunkter er r (se Fig. 3). Den uendelig lange Lednings Modstand Z maalt mellem Punkterne 1 og 1′ maa være den samme som Modstanden, maalt mellem Punkterne 2 og 2′ efter Borttagelsen af det første »Fag«; man har følgelig:

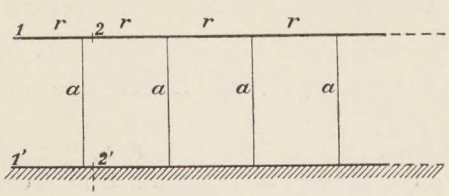


Fig. 3.

$$Z = r + \frac{1}{a + \frac{1}{Z}},$$

altsaa $$Z = \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{r}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{ Ohm. (4).}$$

Er a numerisk meget lille i Forhold til r (dette betegnes i det følgende ved $a \ll r$), giver (4) følgende Tilnærmelsesformel for Z:

$$Z = \sqrt{\frac{r}{a}}.$$

Er Ledningen homogen, kan man sætte

$$r = R dx \text{ og } a = A dx,$$

saaledes at man faar $$Z = \sqrt{\frac{R}{A}},$$

der er indentisk med Udtrykket (3).

Af Formlerne (1) og (2) faas

$$\frac{d V_x}{V_x} = -\frac{R}{Z} \cdot dx = -\gamma \cdot dx, \quad \ldots\ldots\ldots \text{ (5).}$$

hvor $$\gamma = \frac{R}{Z} = \sqrt{R \cdot A} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}}. \text{ (6).}$$

γ kaldes *Dæmpningskonstanten.*

Af (5) faas let

$$V_x = V_o \cdot e^{-\gamma x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (7).}$$

og $$I_x = \frac{V_o}{Z} \cdot e^{-\gamma x} = I_o \cdot e^{-\gamma x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (8).}$$

hvor V_o og I_o er Spænding og Strøm ved Sendestationen. Man ser, at baade Spænding og Strøm langs Ledningen svækkes i Forholdet $e^{-\gamma x}$. Den gennem Punktet x gaaende Effekt P er

$$P_x = P_o \cdot e^{-2\gamma x}, \quad \ldots\ldots\ldots \text{ Watt. (9).}$$

hvor P_o er den samlede Effekt, der tilføres Ledningen.

Har selve Afsendeapparatet Modstanden S, faas

$$E = I_o \cdot S + V_o = \frac{S + Z}{Z} \cdot V_o,$$

eller $$V_o = \frac{Z}{S + Z} \cdot E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{ (10).}$$

Indsættes denne Værdi for V_o i (7) og (8) bliver disse Ligninger:

$$V_x = E \cdot \frac{Z}{S+Z} \cdot e^{-\gamma x}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

og

$$I_x = E \cdot \frac{1}{S+Z} \cdot e^{-\gamma x}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Specielt for $S = Z$ faas:

$$V_x = \frac{1}{2} \cdot E \cdot e^{-\gamma x} \text{ og } I_x = \frac{E}{2Z} \cdot e^{-\gamma x}.$$

§ 1 *a*. Selv for Ledninger af vilkaarlig Længde kan man uden Vanskelighed integrere Ligningerne (2). Elimineres V_x eller I_x faas:

$$\frac{d^2 I_x}{dx^2} = RA I_x \text{ og } \frac{d^2 V_x}{dx^2} = RA V_x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2').$$

Ifølge [III. 6] tilfredsstilles disse Differentialligninger af:

$$\left.\begin{aligned} I_x &= I_1 \cosh x\sqrt{RA} + I_2 \sinh x\sqrt{RA} \\ V_x &= V_1 \cosh x\sqrt{RA} + V_2 \sinh x\sqrt{RA} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (3').$$

For $x = o$ skal $I_x = I_o$ og $V_x = V_o$, følgelig er $I_1 = I_o$, $V_1 = V_o$.

Af $\frac{dV_x}{dx} = -RI_x$ faas derpaa $I_2 = -V_o\sqrt{\frac{A}{R}} = -\frac{V_o}{Z}$ og $V_o = -ZI_o$.

Indsættes de saaledes fundne Konstanter i (3') faas, idet $\sqrt{RA} = \gamma$,

$$\left.\begin{aligned} I_x &= I_o \cosh \gamma x - \frac{V_o}{Z} \sinh \gamma x \\ V_x &= V_o \cosh \gamma x - Z I_o \sinh \gamma x \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3'').$$

der giver Strøm og Spænding i et vilkaarligt Punkt af en homogen Ledning i Afstanden x fra Begyndelsespunktet udtrykt ved Strøm og Spænding i sidstnævnte Punkt.

§ 2. *Ledning med endelig Længde, forsynet med Modtageapparat. Inhomogene Ledninger. Refleksionstab.*

Har Ledningen kun en vilkaarlig Længde l km og afsluttes den med et Modtageapparat med Modstanden Z, saa vil øjensynlig Strøm og Spænding i Ledningen forløbe

ganske, som om denne var den første Del af en uendelig lang Ledning. Gennem Modtageapparatet gaar Strømmen

$$I_l = \frac{E}{S+Z} \cdot e^{-\gamma l},$$

og Klemspændingen er

$$V_l = E \cdot \frac{Z}{S+Z} \cdot e^{-\gamma l}.$$

Den Effekt, der passerer den homogene Ledning i Punktet l, og følgelig ogsaa den af Modtageapparatet optagne Effekt, er

$$P = E^2 \cdot \frac{Z}{(S+Z)^2} \cdot e^{-2\gamma l} \quad \ldots\ldots \text{ Watt. (13).}$$

For givne Værdier af S, γ og l faar man for $Z = S$ den største Værdi af P, nemlig

$$P_m = \frac{E^2}{4S} \cdot e^{-2\gamma l}.$$

γl kaldes Dæmpningseksponenten.

Selv i en Ledning af endelig Længde og afsluttet med et Modtageapparat med en Modstand, der er forskellig fra Z, vil dog Strøm og Spænding i Nærheden af Sendestationen blive omtrent de samme (altsaa med Tilnærmelse bestemte ved (11) og (12)), naar blot l er saa stor, at $e^{-\gamma l} \ll 1$. Ledninger, der tilfredsstiller denne Betingelse, kaldes lange.

To lange Ledninger, ab med Konstanterne Z_1, γ_1 og Længden l_1 og bc med Konstanterne Z_2, γ_2 og l_2, støder sammen i Punktet b (Fig. 4; i denne betegner enkelte Pile den Retning, i hvilken Strøm og Spænding regnes positive, dobbelte Pile den Retning, hvori den af Strømmen førte Energi bevæger sig). Kaldes den i Sammenstødspunktet b tilstedeværende Spænding for V_{l_1}, og Strømmen, der fra Ledning I gaar ind i II for I_t, saa er

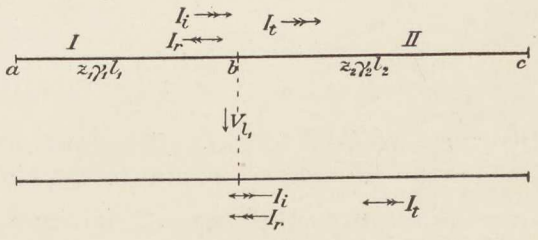


Fig. 4.

$$V_{l_1} = Z_2 \cdot I_t,$$

idet Strøm og Spænding ved Begyndelsen af Ledning II forløber som i en uendelig lang Ledning.

Da der ikke i Punktet b kan ske nogen Ophobning af Elektricitet, maa den fra Ledning I til b ankommende Strøm være lig med I_t; men naar Z_1 er forskellig fra Z_2, kan man ikke samtidig have V_{l_1} lig med $Z_1 I_t$ og $Z_2 I_t$. Forløbet af Strøm og Spænding i Ledning I i Nærheden af Sammenstødspunktet er derfor anderledes, end det vilde være, hvis Ledning I fortsattes i det Uendelige ud over Punktet b. Man kan tænke sig Strømmen i Ledning I ved Punktet b bestaaende af to Dele: een fra a ankommende Strøm I_i, der forløber ganske, som om Ledning I var uendelig lang, og een fra Sammenstødspunktet reflekteret Strøm I_r, der bevæger sig fra b til a, og som ligeledes forløber, som om Ledning I var uendelig lang. Til disse Strømme svarer henholdsvis Spændingerne

$$V_i = Z_1 \cdot I_i \text{ og } V_r = -Z_1 \cdot I_r;$$

det negative Fortegn i sidste Ligning hidrører fra, at I_r fører Energi i modsat Retning af de to andre Strømme.

I_t og I_r skal nu bestemmes saaledes, at

$$V_i + V_r = V_{l_1} = Z_2 \cdot I_t \text{ og } I_i + I_r = I_t.$$

Heraf faas:

$$I_r = I_i \cdot \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = rI_i \text{ og } V_r = V_i \cdot \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = -r \cdot V_i \ldots (14).$$

og

$$I_t = I_i \cdot \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = t \cdot I_i \text{ og } V_{l_1} = V_i \cdot \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}, \ldots (15).$$

hvor $r = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ kaldes Refleksionskoefficienten og $t = 1 + r = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$ Transmissionskoefficienten.

Ligning (14) viser, at I_r har samme Fortegn som I_i og I_t, naar $Z_1 > Z_2$ (smlgn. Fig. 5), men modsat Tegn, naar $Z_1 < Z_2$ (Fig. 6). For $Z_1 = Z_2$ er I_r lig 0.

Ender Ledning II (Fig. 4) i et Modtageapparat med Modstanden Z_2, er dettes Klemspænding V_c bestemt ved

$$V_c = V_{l_1} \cdot e^{-\gamma_2 l_2};\ V_{l_1} = V_i \cdot \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2};\ V_i = V_o \cdot e^{-\gamma_1 l_1},$$

altsaa

$$V_c = V_o \cdot \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot e^{-(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

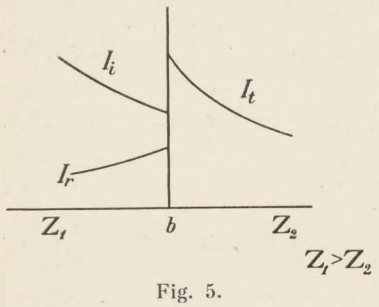


Fig. 5.

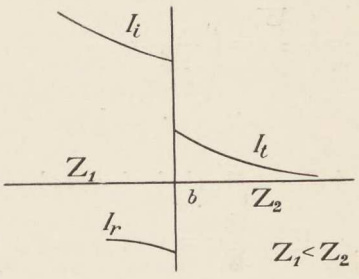


Fig. 6.

Den gennem Modtageren gaaende Strøm bliver

$$I_c = \frac{V_c}{Z_2} = V_o \cdot \frac{2}{Z_1 + Z_2} \cdot e^{-(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)} \ldots\ldots\ldots \quad (17).$$

Tilsvarende vil en Klemspænding V_o virkende i c frembringe en Klemspænding V_a i Punktet a, naar der ved dette indskydes en Modtager med Modstand Z_1, hvor V_a er bestemt ved

$$V_a = V_o \cdot \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \cdot e^{-(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Den gennem denne Modtager gaaende Strøm bliver

$$I_a = \frac{V_a}{Z_1} = V_o \cdot \frac{2}{Z_1 + Z_2} \cdot e^{-(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)} = I_c.$$

Denne »Reciprocitetssætning«, der her kun er bevist for et specielt Tilfælde, gælder for et vilkaarligt Ledningssystem, saaledes at man har Reglen: Virker en E.M.K. E i Ledningen A og giver den Strømmen I igennem en Ledning B, saa vil den samme E.M.K. E virkende i B give Strømmen I i Ledningen A.

Under de givne Forudsætninger er $V_o = \frac{1}{2}E$, idet Halvdelen af Spændingen tabes i selve Apparaterne. Den til Ledningen i a afgivne Effekt er derfor

$$A_a = \frac{E^2}{4Z_1}$$

medens den i c optagne Effekt er

$$P_c = V_o^2 \cdot \frac{4Z_2}{(Z_1+Z_2)^2} \cdot e^{-(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)} = E^2 \cdot \frac{Z_2}{(Z_1+Z_2)^2} \cdot e^{-2(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)}.$$

Som et Maal for Transmissionens Godhed kan man betragte Transmissionskoefficienten T, defineret ved

$$T = \sqrt{\frac{P_c}{A_a}} = \sqrt{\frac{P_a}{A_c}} = \frac{2\sqrt{Z_1 Z_2}}{Z_1+Z_2} \cdot e^{-(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2)} = e^{-(\gamma_1 l_1 + \gamma_2 l_2 + \varrho)}, \quad (19).$$

hvor

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\, lgn \left\{ \tfrac{1}{2} \left[1 + \tfrac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \right] \right\} \ldots\ldots \text{Tal. (19')}.$$

ϱ kaldes Refleksionseksponenten.

For $\frac{Z_1}{Z_2} = 1$ er $\varrho = 0$; for alle andre Værdier af $\frac{Z_1}{Z_2}$ er $\varrho > 0$, og desto større, jo mere Forholdet $\frac{Z_1}{Z_2}$ afviger fra 1. Naar Ledningerne har forskellige Karakteristikker, medfører Inhomogeniteten derfor altid en ekstra Svækkelse. (Se iøvrigt Fig. 19 Side 38).

Hvis der imellem de to lange Ledninger I (Z_1, γ_1, l_1) og II (Z_2, γ_2, l_2) er indskudt et kort Ledningsstykke med Modstandene X_1 og X_2, samt en Bro med Modstanden Y (se Fig. 7), kan man paa anolog Maade let beregne Strøm- og Spændingsforholdene. Med de sædvanlige Betegnelser finder man:

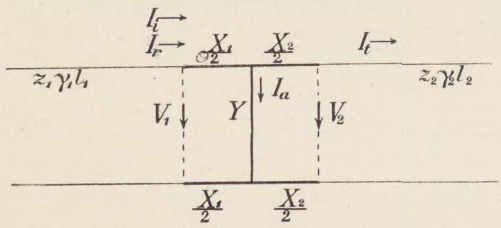


Fig. 7.

$$\left.\begin{aligned} I_r &= I_i \cdot \frac{Z_1 - X_1 - X_2 - Z_2 + \frac{(Z_1 - X_1)(Z_2 + X_2)}{Y}}{N}, \\ I_t &= I_i \cdot \frac{2Z_1}{N}, \\ V_1 &= 2 \cdot V_i \cdot \frac{X_1 + X_2 + Z_2 + \frac{X_1(Z_2 + X_2)}{Y}}{N}, \\ V_2 &= V_i \cdot \frac{2Z_2}{N}, \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (20).$$

hvor

$$N = Z_1 + Z_2 + X_1 + X_2 + \frac{(Z_1 + X_1)(Z_2 + X_2)}{Y}.$$

§ 3. *Den overførte Effekt. Den fordelagtigste Modstand for Modtageapparatet.*

Den til Ledning II (Fig. 4) overførte Effekt P bestemmes ved

$$P = V_{l_1} \cdot I_t = V_o \cdot e^{-\gamma_1 l_1} \cdot \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \cdot V_o \cdot e^{-\gamma_1 l_1} \cdot \frac{2}{Z_1 + Z_2} =$$

$$= E^2 \cdot e^{-2\gamma_1 l_1} \cdot \frac{Z_1^2}{(Z_1 + S)^2} \cdot \frac{4Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \ldots . \text{Watt.} \quad (21).$$

Nøjagtig den samme Effekt overføres naturligvis, naar Ledning II erstattes af et Modtageapparat med Modstanden Z_2. Er i Ligning (21) alle Størrelser med Undtagelse af Z_2 givne, saa bliver P saa stor som mulig for $Z_2 = Z_1$, nemlig

$$P = E^2 \cdot e^{-2\gamma_1 l_1} \cdot \frac{Z_1}{(Z_1 + S)^2} \quad \ldots . \text{Watt.} \quad (22).$$

Er i (21) alle Størrelser med Undtagelse af Z_1 givne, bliver P Maksimum, naar Størrelsen $\frac{Z_1}{(Z_1 + S)(Z_1 + Z_2)}$ er Maksimum, altsaa for

$$Z_1 = \sqrt{Z_2 \cdot S},$$

d. v. s. Z_1 skal være det geometriske Middeltal af Z_2 og S; i saa Fald faas

$$P = E^2 \cdot e^{-2\gamma_1 l_1} \cdot \frac{4Z_2}{(\sqrt{Z_2} + \sqrt{S})^4} \ldots . \text{Watt.} \quad (23).$$

For en given Værdi af S bliver disse Udtryk, (22) og (23), saa store som muligt for $Z_1 = Z_2 = S$, nemlig

$$P_m = \frac{1}{4S} \cdot E^2 \cdot e^{-2\gamma_1 l_1}; \ldots . \text{Watt.} \quad (24).$$

dette er den største Effekt, der overhovedet kan overføres fra en Afsender med Modstanden S gennem en Ledning med Dæmpningseksponent $\gamma_1 l_1$, naar der i Afsenderen virker en E.M.K. E.

Eks. For $Z_1 = 2S$ og $Z_2 = 4S$ faas

$$P = \frac{16}{81S} \cdot E^2 \cdot e^{-2\gamma_1 l_1};$$

medens $Z_1 = Z_2 = 4S$ giver

$$P = \frac{4}{25S} \cdot E^2 \cdot e^{-2\gamma_1 l_1}.$$

Har Afsender og Modtager samme Modstand ($Z_2 = S$), faar P sin største Værdi for $Z_2 = S = \frac{1}{3}Z_1$; P bliver da

$$P = \frac{27}{64Z_1} \cdot E^2 \cdot e^{-2\gamma_1 l_1}.$$

I Almindelighed gælder Ligning (21) kun, naar Ledning I er lang; men er enten $Z_2 = Z_1$ eller $S = Z_1$, saa gælder (21) for alle Værdier af l_1. I første Tilfælde er der nemlig ingen Refleksion ved Modtageren, i sidste ingen ved Afsenderen; Ligningerne (22) og (24) gælder derfor eksakt for alle Værdier af l_1, idet her en af de nævnte Betingelser er opfyldte.

B. Vekselstrøm.

§ 4. *Indledning.*

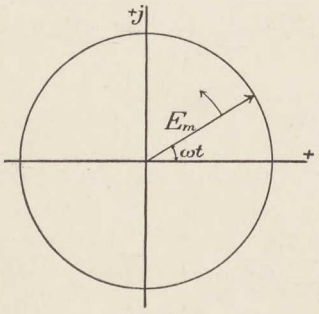


Fig. 8.

I Afsenderen virker en E. M. K.: $e = E_m \cdot e^{j\omega t} = E_m(\cos \omega t + j \sin \omega t)$. Den E. M. K. fremstilles altsaa som en Vektor [II.] med Længden E_m og roterende om Begyndelsespunktet med konstant Vinkelhastighed ω (Fig. 8). Perioden er $\frac{2\pi}{\omega}$, Frekvensen $n = \frac{\omega}{2\pi}$.

Overgangen fra Jævnstrøm til Vekselstrøm bevirker i Hovedsagen kun, at Jævnstrømsmodstanden R erstattes af Impedansen $R + j\omega L = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \cdot e^{j\varphi}$, hvor $tg\varphi = \frac{\omega L}{R}$, medens A erstattes med $A + j\omega C = \sqrt{A^2 + \omega^2 C^2} \cdot e^{j\psi}$, hvor $tg\psi = \frac{\omega C}{A}$. De heri indgaaende Konstanter R, L, A og C kaldes Ledningens primære Konstanter.

§ 5. *De primære Konstanter.*

R er den effektive Modstand i Ohm pr. Liniekilometer. (Er den anvendte Traads Modstand r pr. km, saa er for Dob-

beltleder $R = 2r$. For Enkeltleder se § 18). Den falder ved Luftledninger og for de for Telefonien vigtigste Frekvenser med tilstrækkelig Tilnærmelse sammen med Jævnstrømsmodstanden ([IV]. For Jernledninger se § 16). Ved Ledninger med kunstig forhøjet Selvinduktion er den effektive Modstand hyppig en Del højere end Jævnstrømsmodstanden; dog herom senere. Ved Kabler vil der hyppigt opstaa Hvirvelstrømme i Naboledninger, Blykappe m. m. Dette i Forbindelse med den nedenfor nævnte Strømkoncentration vil forøge den effektive Modstand desto mere, jo højere Frekvensen er.

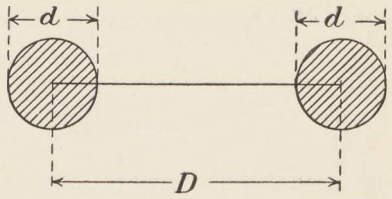


Fig. 9.

L er Selvinduktionen i Henry pr. Liniekilometer. For en Dobbeltledning bestaaende af 2 parallele Ledere med Diameter d og Centerafstand D (Fig. 9) er, naar $D \gg d$, med Tilnærmelse

$$L = 4\left(\lg\frac{2D}{d} + \frac{1}{4}\right)\cdot 10^{-4} = \left(9{,}21\ Log\ \frac{2D}{d} + 1\right) 10^{-4}\ \frac{\text{H}}{\text{km}}. \quad \text{(a)}.$$

Det sidste Led i Parentesen hidrører fra Feltet inde i Traadene; for høje Frekvenser vil Strømmen have Tilbøjelighed til at forløbe paa Ledernes Overflade; dette Led vil i saa Fald formindskes lidt [IV]. Rykker Lederne tæt sammen, vil Strømmen da tillige hovedsagelig gaa paa de mod hinanden vendende Sider af Lederne, hvorved Selvinduktionen yderligere sættes lidt ned. For de almindelige Forhold ved Telefonluftledninger gælder Formlen dog med tilstrækkelig Tilnærmelse; nogle Taleksempler findes i hosstaaende Tabel.

d	2	3	4	5 mm.
$D = 300$ mm. $L =$	2,38	2,22	2,10	$2{,}02 \cdot 10^{-3}$ $\frac{\text{H}}{\text{km}}$
$D = 400$ mm. $L =$	2,50	2,33	2,22	$2{,}13 \cdot 10^{-3}$ »

For papir-luftisolerede Blyrørskabler ligger L ofte i Nærheden af $0{,}6 \cdot 10^{-3}$ $\frac{\text{H}}{\text{km}}$.

C er den effektive Kapacitet i Farad pr. Liniekilometer*). (C er Kapaciteten mellem de to Ledninger, der tilsammen danner Strømløbet, altsaa for en Enkeltledning dennes Kapacitet til Jord, for en Dobbeltledning de to Traades indbyrdes Kapacitet). Med de samme Betegnelser som ovenfor er med Tilnærmelse Kapaciteten af de to parallelle Ledere:

$$C = \frac{1}{36 \cdot lgn \frac{D + \sqrt{D^2 - d^2}}{d}} \cdot 10^{-6} \ldots\ldots \frac{F}{km}. \quad (b).$$

For smaa Værdier af $\frac{d}{D}$ bliver dette Udtryk til

$$C = \frac{1}{36 \cdot lgn \frac{2D}{d}} \cdot 10^{-6} = \frac{0{,}01206}{Log \frac{2D}{d}} \cdot 10^{-6} \ldots\ldots \frac{F}{km}. \quad (c).$$

Nogle Taleksempler findes i hosstaaende Tabel.

	d	2	3	4	5 mm.
$D = 300$ mm.	$C =$	4,87	5,24	5,54	$5{,}80 \cdot 10^{-9}$ $\frac{F}{km}$.
$D = 400$ mm.	$C =$	4,64	4,97	5,24	5,47 ».

Formlerne (a) og (c) er udledede under den Forudsætning, at $D \gg d$, en Forudsætning, der som Regel vil være opfyldt med tilstrækkelig Tilnærmelse ved Luftledninger. Men det er tillige forudsat, at der ikke findes andre Ledninger eller Legemer med en større Dielektricitetskonstant end 1 i Nærheden. Denne Forudsætning er aldrig opfyldt; der er næsten altid andre Ledninger i Nærheden, og den betragtede Ledning er i hvert Fald understøttet i Isolatorer. Tiltrods herfor giver dog (a) Ledningens Selvinduktion med tilstrækkelig Tilnærmelse for Luftledninger; derimod bør den ved (c) beregnede Kapacitet for Luftledninger forøges med ca $5 \cdot 10^{-10}$ $\frac{F}{km}$.

Tillæg VI giver Værdier for L og C beregnede paa Grundlag af Formlerne (a) og (b).

*) Erfaringen viser, at $C_{\omega=5000}$ ofte er omkring 10 % mindre end C_0.

For en Enkeltledning i Højden H over Jordoverfladen bestemmes Selvinduktion og Kapacitet ved

$$L = 2\left(lgn\frac{4H}{d} + \frac{1}{4}\right)\cdot 10^{-4}, \ldots\ldots\ldots \frac{\text{H}}{\text{km}}. \text{ (a')}.$$

og

$$C = \frac{10^{-6}}{18\cdot lgn\frac{4H}{d}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\text{F}}{\text{km}}. \text{ (c')}.$$

For en Enkeltleder med Diameter d, omgivet af et Isolationslag med Diameter D og Dielektricitetskonstant ε og nedsænket i Vand, er Kapaciteten

$$C = \frac{\varepsilon}{18\cdot lgn\frac{D}{d}}\cdot 10^{-6} = \frac{\varepsilon}{41{,}45\cdot Log\frac{D}{d}}\cdot 10^{-6} = \frac{0{,}02413\cdot\varepsilon}{Log\frac{D}{d}}\cdot 10^{-6}\ \frac{\text{F}}{\text{km}}. \text{ (d)}.$$

For en Dobbeltledning, nedsænket i Vand saaledes, at de to Ledere er adskilte af et Vandlag, bliver Kapaciteten nærmest at beregne som om Systemet bestod af de to Kondensatorer Leder—Vand og Vand—Leder i Serie. Er de to Ledere derimod omgivne af en fælles, vandtæt Kappe, faar Kapaciteten en anden Værdi, der vanskelig lader sig beregne, men maa fastsættes ved Sammenligning med Kapaciteten af andre, lignende Kabler.

For papir-luftisolerede Blyrørskabler ligger C ofte i Nærheden af 0,04 $\frac{\mu\text{F}}{\text{km}}$. Ved Kabler maales ofte Kapaciteten C_1 mellem den enkelte Traad og alle andre Traade, Blykappe m. m.; for almindelige papir-luftisolerede Kabler er $C =$ ca. 0,70 C_1.

A er Afledningen i Siemens pr. Liniekilometer. Afledningen maales imellem de to Ledninger, der tilsammen danner Strømløbet; den ligger som Regel imellem $0{,}5—5\cdot 10^{-6}$ Siemens pr. km. Den effektive Værdi for Afledningen er for Kabler hyppigt meget større for Vekselstrøm end for Jævnstrøm. For det sidste Tilfælde har man en simpel Relation mellem A og C. Dette ses saaledes: Kapaciteten i cm af en Pladekondensator med Pladeareal F cm^2 og Pladeafstand a cm er $C = \frac{F\cdot\varepsilon}{4\pi a}$, hvor ε er Dielektricitetskonstanten. Er Ledningsfylden λ, saa er $A = \frac{F\cdot\lambda}{a}$; altsaa er $\frac{A}{C} = \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}$ kon-

stant, uafhængig af Kondensatorens Form og Størrelse, kun afhængig af Materialets Beskaffenhed. Dette gælder for Jævnstrømsværdierne, men derimod langtfra for Vekselstrøm. For de fleste Isolationsmaterialier gælder med Tilnærmelse $A = A_0 + A_\omega$, hvor A_0 er konstant, medens A_ω er proportional med Frekvensen; altsaa $A_\omega = \varkappa\omega C$, hvor $\varkappa$ er en Konstant. For telefoniske Forhold er hyppigt $A_\omega \gg A_0$, saaledes at $A = \varkappa\omega C$. Betydningen af $\varkappa = \frac{A}{\omega C}$ ses saaledes: Kondensatoren C (Fig. 10) er shuntet med Modstanden $\frac{1}{A}$; paavirkes den

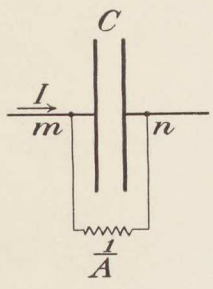


Fig. 10.

af en E.M.K. $e = E_m \cos \omega t$ bliver Strømmen

$$i = E_m \cdot \sqrt{A^2 + \omega^2 C^2} \cdot \cos(\omega t + \varphi'),$$

hvor

$$tg\, \varphi' = \frac{\omega C}{A}.$$

Effektfaktoren bliver derfor

$$\cos \varphi' = \frac{A}{\sqrt{A^2 + \omega^2 C^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25).$$

For de i Praksis benyttede Isolationsmaterialier er selvfølgelig $A \ll \omega C$, saaledes at man med Tilnærmelse har

$$\cos \varphi' = \frac{A}{\omega C}.$$

At man har fundet denne Størrelse konstant viser altsaa, at der i en Kondensator med det betragtede Isolationsmateriale som Dielektrikum er en konstant Faseforskel (lidt mindre end 90°) mellem Strøm og Spænding.

Ifølge Devaux-Charbonnel [I. 15a] kan man sætte

	$\frac{A}{C}$ for $\omega = 5000$	$1000 \cdot \varkappa$
for alm. Guttaperka	112,5	22,5
- forbedret Guttaperka	11,2	2,25
- meget tørt Papir	23,5	4,7
- alm. Papir	117	23,4

	$\frac{A}{C}$ for $\omega = 5000$	$1000 \cdot \varkappa$
for Luftlinier	169	 33,8
- Parafin	1,9	 0,38
- Glimmer	6,6	 1,32

(Se iøvrigt Fleming & Dyke: Power Factor and Conductivity of Dielectrics. Journ. of the Inst. of El. Eng. Vol. 49, p. 323—431, 1912.)

§ 6. *Almindelige Ligninger for en Vekselstrøms Bevægelse gennem en lang Ledning.*

Alle Regninger i § 1 og 1a bliver ved Overgangen til Vekselstrøm ganske uforandrede; i Formlerne erstattes kun Modstanden R med Impedansen $R+j\omega L$ og Afledningen A med Admittansen $A+j\omega C$. Man faar altsaa

$$Z=\sqrt{\frac{R+j\omega L}{A+j\omega C}}=\sqrt{\frac{RA+\omega^2LC+j\omega(AL-RC)}{A^2+\omega^2C^2}}$$

$$=a+jb=\sqrt{a^2+b^2}\cdot e^{j\chi}, \ldots \text{Impedans.} \quad (26).$$

og

$$\gamma=\sqrt{(R+j\omega L)(A+j\omega C)}=\sqrt{RA-\omega^2LC+j\omega(AL+RC)}$$

$$=\alpha+j\beta=\sqrt[4]{(R^2+\omega^2L^2)(A^2+\omega^2C^2)}\cdot e^{j\frac{\varphi+\psi}{2}} \ldots \frac{\text{kompl. Tal}}{\text{km}}. \quad (27).$$

Man kalder Z og γ eller a, b, α og β for Ledningens sekundære Konstanter.

Af Ligningerne (11) og (12) faas

$$v_x=e\cdot\frac{Z}{Z+S}\cdot e^{-\gamma x}=e\cdot\frac{Z}{Z+S}\cdot e^{-\alpha x}\cdot e^{-j\beta x}$$

$$=e\cdot\frac{Z}{Z+S}\cdot e^{-\alpha x}\cdot(\cos\beta x-j\sin\beta x), \quad \ldots\ldots\ldots \quad (28).$$

og

$$i_x=e\cdot\frac{1}{Z+S}\cdot e^{-\gamma x}=e\cdot\frac{1}{Z+S}\cdot e^{-\alpha x}\cdot e^{-j\beta x}$$

$$=e\cdot\frac{1}{Z+S}\cdot e^{-\alpha x}\cdot(\cos\beta x-j\sin\beta x). \quad \ldots\ldots\ldots \quad (29).$$

Disse Ligninger udtrykker Spænding og Strøm i Punktet x som Vektorer, idet e jo ogsaa er tænkt som Vektor. Ligningerne bestemmer saaledes Amplitude og Fase af Spænding og Strøm i et vilkaarligt Punkt af Ledningen i Forhold til den i Afsenderen til samme Tidspunkt virkende Momentanværdi af den E.M.K.

Idet

$$e = E_m \cdot e^{j\omega t} = E_m (\cos \omega t + j \sin \omega t), \quad \ldots\ldots \quad (30).$$

bestemmes Spænding og Strøm for et vilkaarligt Tidspunkt og for et vilkaarligt Punkt af Linien ved:

$$v_x = E_m \cdot \frac{Z}{Z+S} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$= E_m \cdot \frac{Z}{Z+S} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \big(\cos(\omega t - \beta x) + j \sin(\omega t - \beta x)\big) \ldots \quad (31).$$

$$i_x = \frac{E_m}{Z+S} \cdot e^{-\alpha x} \cdot e^{j(\omega t - \beta x)}$$

$$= \frac{E_m}{Z+S} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \big(\cos(\omega t - \beta x) + j \sin(\omega t - \beta x)\big) \ldots \quad (32).$$

Det fremgaar heraf, at en E.M.K. $e = E_m \cos \omega t$ virkende i en Afsender med Impedansen $S = s + jq$ frembringer i Punktet x i Lederen en Spænding og Strøm givet ved

$$v_x = E_m \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{(a+s)^2 + (b+q)^2}} \cdot e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \varphi_1), \ldots \quad (33).$$

$$i_x = E_m \cdot \sqrt{\frac{1}{(a+s)^2 + (b+q)^2}} \cdot e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \beta x + \varphi_2), \ldots \quad (34).$$

hvor

$$\left.\begin{aligned} tg\,\varphi_1 = \frac{bs - aq}{a(a+s) + b(b+q)},\ tg\,\varphi_2 = -\frac{b+q}{a+s} \text{ og} \\ tg(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{b}{a}. \end{aligned}\right\} \ldots (35).$$

Saavel Spænding som Strøm forløber altsaa i ethvert Punkt af Lederen sinusformet med Frekvensen $n = \frac{\omega}{2\pi}$; Faseforskellen mellem Spænding og Strøm er if. (35) konstant langs hele Lederens Længde.

Sættes $\omega t - \beta x + \varphi =$ konstant, svarer dette til, at man betragter et bestemt Punkt af Bølgen under dets Vandring langs Lederen; dets Hastighed v findes ved Differentiation heraf:

$$\omega \cdot dt - \beta \cdot dx = 0,$$

altsaa

$$\frac{dx}{dt} = v = \frac{\omega}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \frac{\text{km}}{\text{sek}}. \quad (36).$$

Bølgelængden bliver

$$\lambda = \frac{v}{n} = \frac{2\pi}{\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{km}. \quad (37).$$

Man kan følgelig fremstille baade Spændings- og Strømforforløbet som Sinuskurver, der med samme konstante Hastighed og samme Bølgelængde bevæger sig ud ad Lederen, idet Spændingsamplituden begrænses af Kurverne $\pm E_m \cdot \sqrt{\frac{a^2+b^2}{(a+s)^2+(b+q)^2}} \cdot e^{-\alpha x}$, medens Strømamplituden begrænses af Kurverne $\pm E_m \cdot \sqrt{\frac{1}{(a+s)^2+(b+q)^2}} \cdot e^{-\alpha x}$.

Se Figur 11, hvor Maalestoksforholdet er valgt saaledes, at Strøm og Spænding faar samme Amplitudebegrænsningskurver.

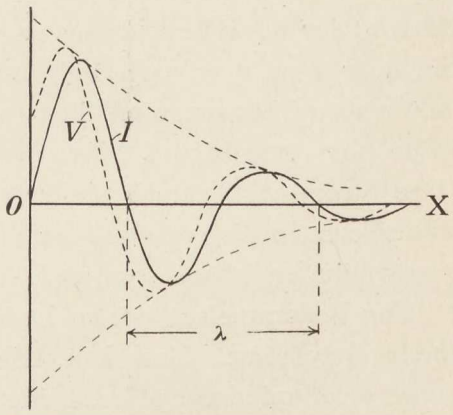


Fig. 11.

Da saaledes β er afgørende for den Hastighed, hvormed Bølgerne bevæger sig langs Ledningen, medens α er bestemmende for deres Intensitet, kaldes β for Hastighedskoefficienten og α for Dæmpningskoefficienten, medens γ kaldes Bølgernes Vandringskonstant. Størrelsen αl kaldes Dæmpningseksponenten.

§ 7. *Almindelige Bemærkninger om Telefonstrømmes Forvrængning.*

Talen er sammensat af Toner og Partialtoner af flere Frekvenser n_1, n_2, $n_3 \ldots$, og da α og v i Almindelighed afhænger af Frekvensen, saa vil Partialtonernes Intensitet langs Ledningen variere paa forskellig Maade, ligesom der vil finde en stadig voksende Forskydning Sted mellem de enkelte Partialbølger. Sendes der fra Afsenderstationen vedvarende Bølger med f. Eks. de to Frekvenser n_1 og $2n_1$ ud paa Ledningen, kan den iagttagelige Forskydning højst løbe op til Bølgelængden for den korteste Bølge; men udsendes Bølgen kun en begrænset Tid, vil Forholdet kunne blive saa grelt, at Bølgen med den laveste Frekvens er løbet foran og forbi Bølgen med den højere Frekvens. Dette Forhold er skitseret i Fig. 12; der er dog hertil at bemærke, at naar de to Partialbølger løber med forskellig Hastighed vil samtidig deres Form forvanskes; dette Forhold er dog saa indviklet, at der her ikke skal gaas nærmere ind paa det [I. 27, 30]. Kun naar α og v er uafhængige af Frekvensen, vil der ikke finde nogen Forvrængning Sted; saadanne Ledninger kaldes derfor forvrængningsfri. Ved forvrængningsfrie Ledninger vil en Strøm- og Spændingsbølge af vilkaarlig Form beholde denne Form, medens Bølgen vandrer hen ad Ledningen; kun vil Amplituden aftage som $e^{-\alpha x}$.

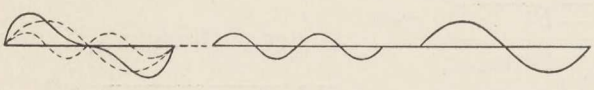


Fig. 12.

For Bedømmelsen af en Lednings Godhed har α den største Betydning. Man kan tale gennem Ledninger, for hvilke αl er mindre end ca. 4, idet denne Grænse dog naturligvis afhænger af Anlægets Godhed iøvrigt. Ogsaa med Hensyn til Forvrængningen er α vigtigst; α bør variere saa lidt som muligt med Frekvensen. Som et Maal for Forvrængningen benyttes ofte Udtrykket

$$\frac{\alpha_{(\omega=7000)} - \alpha_{(\omega=3000)}}{\alpha_{(\omega=7000)} + \alpha_{(\omega=3000)}}$$

Derimod synes Hastigheden v at være mindre vigtig, idet Øret ikke er særlig kritisk overfor Forskydninger i de Toner, hvoraf Vokalerne er sammensat. Man plejer at regne $n = \frac{5000}{2\pi} = 796$ som den for Telefonien vigtigste Frekvens.

Som et specielt Eksempel paa en forvrængsningsfri Ledning skal her nævnes en saadan, hvor $R = 0$ og $A = 0$; i saa Fald er $\alpha = 0$, $\beta = \omega\sqrt{LC}$, $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ og $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$. I en saadan Ledning vil en vilkaarlig Bølge, som nævnt, beholde sin Form uforandret under Vandringen langs Ledningen, og her vil tillige Amplituden forblive uforandret. For ethvert Punkt af Bølgen gælder

$$v = Z \cdot i; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38).$$

Bølgen møder derfor overalt samme Modstand Z i den homogene Ledning. Da Amplituden bliver uforandret, lides der ikke noget Energitab, men det er den samme Energimængde, der vandrer fremad hele Tiden. Z er saaledes nok en »ohm'sk« Modstand, defineret ved (38), men derimod ingen »joule'sk« Modstand, idet den ikke medfører nogen Omsætning af elektromagnetisk Energi til Varme. Disse »Vandrebølger« spiller en stor Rolle i Højspændingsteknikken. (W. Petersen: Hochspannungstechnik 1911; Abs. Larsen: Ing. 1913—14.)

Den almindelige Betingelse for, at en Ledning er forvrængningsfri, er at $\alpha = \alpha_0$ og $\beta = \frac{\omega}{v_0}$, hvor α_0 og v_0 er uafhængige af ω. Af Betingelsen

$$\gamma = \alpha_0 + j \cdot \frac{\omega}{v_0} = \sqrt{RA - \omega^2 LC + j\omega(AL + RC)}$$

følger

$$\alpha_0 = \sqrt{A \cdot R} \text{ og } \frac{1}{v_0} = \sqrt{LC}, \ldots\ldots\ldots\ldots (39),$$

samt at Betingelsesligningen

$$AL = RC \text{ eller } \frac{A}{R} = \frac{C}{L} \ldots\ldots\ldots\ldots (39').$$

skal være tilfredsstillet. Den ovenfor omtalte forvrængnings-

fri Ledning, hvor $R = A = o$, er, som det ses, et ganske specielt Tilfælde heraf. Er Betingelsesligningen (39') tilfredsstillet, saa finder man let, at Z er reel: $Z = \sqrt{\frac{R}{A}} = \sqrt{\frac{L}{C}}$, samt at α og v bestemmes ved (39). For en forvrængningsfri Ledning har man altsaa samtidig gældende de 4 Relationer: Z er reel, v er uafhængig af ω, α er uafhængig af ω samt endelig $AL = RC$; det ses imidlertid let, at hver enkelt af disse Relationer medfører de 3 andre, saaledes at naar blot en enkelt af dem er tilfredsstillet, saa er Ledningen forvrængningsfri.

I Almindelighed er $\frac{A}{R} < \frac{C}{L}$, og Ledningen derfor ikke forvrængningsfri. Det har flere Gange været foreslaaet at tilvejebringe Forvrængningsfrihed ved at forøge Afledningen. Forslaget lider dog af den Fejl, at man samtidig dermed forøger α.

§ 8. *Relationer mellem de primære og de sekundære Konstanter.*

a). Vi betragter først Bølgernes Vandringskonstant

$$\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(A + j\omega C)} = \sqrt{RA - \omega^2 LC + j\omega(AL + RC)}$$

$$= \sqrt[4]{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)} \cdot e^{j\frac{\varphi+\psi}{2}} \cdots \frac{\text{kompl. Tal}}{\text{km}} \quad (40).$$

Da Faktoren til j under Rodtegnet altid er positiv, saa er baade α og β ogsaa altid positive. (Er B positiv, saa ligger $A + jB$ i første eller anden Kvadrant, og i saa Fald ligger $\alpha + j\beta = \sqrt{A + jB}$ nødvendigvis i første Kvadrant, d. v. s. baade α og β er positive).

Man finder let:

$$\alpha^2 - \beta^2 = RA - \omega^2 LC$$
$$2\alpha\beta = \omega(AL + RC).$$

Heraf faas:

$$4\alpha^4 - 4(RA - \omega^2 LC)\alpha^2 - \omega^2(AL + RC)^2 = o.$$

Altsaa $2\alpha^2 = RA - \omega^2 LC \pm \sqrt{(RA - \omega^2 LC)^2 + \omega^2(AL + RC)^2}$;

det negative Fortegn foran Kvadratroden kan ikke bruges, da α skal være reel. Man finder altsaa:

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{(RA-\omega^2 LC)^2+\omega^2(AL+RC)^2}+(RA-\omega^2 LC)} \frac{\text{Tal}}{\text{km}} \text{ (41).}$$

Da

$$(RA-\omega^2 LC)^2+\omega^2(AL+RC)^2 = (R^2+\omega^2 L^2)(A^2+\omega^2 C^2),$$

kan (41) ogsaa skrives

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{(R^2+\omega^2 L^2)(A^2+\omega^2 C^2)}+(RA-\omega^2 LC)} \frac{\text{Tal}}{\text{km}} \text{ (42).}$$

Paa tilsvarende Maade faas

$$\beta = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{(R^2+\omega^2 L^2)(A^2+\omega^2 C^2)}-(RA-\omega^2 LC)} \frac{\text{Tal}}{\text{km}} \text{ (43).}$$

Paa ganske analog Maade behandles:

$$Z = a+jb = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{A+j\omega C}} = \sqrt{\frac{(RA+\omega^2 LC)+j\omega(AL-RC)}{A^2+\omega^2 C^2}}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \cdot e^{j\chi}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{ Impedans.}$$

a er en Modstand og er derfor altid positiv; b har altsaa samme Fortegn som $AL-RC$. Man finder:

$$a\sqrt{A^2+\omega^2 C^2} =$$

$$+\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{(R^2+\omega^2 L^2)(A^2+\omega^2 C^2)}+(RA+\omega^2 LC)} \ldots \text{ Ohm. (44).}$$

$$b \cdot \sqrt{A^2+\omega^2 C^2} =$$

$$\pm\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{(R^2+\omega^2 L^2)(A^2+\omega^2 C^2)}-(RA+\omega^2 LC)} \ldots \text{ Ohm. (45),}$$

Af (44) og (45) ses, at a altid er numerisk større end b; Vektoren Z ligger derfor altid i Vinklen fra -45^0 til $+45^0$ (se Fig. 13).

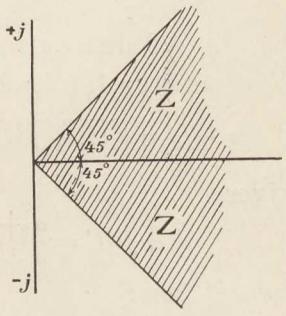


Fig. 13.

Det er ofte bekvemmere, navnlig ved numeriske Beregninger, at bringe Udtrykket for Z paa følgende Form:

$$Z = \sqrt{a^2+b^2} \cdot e^{j\chi} =$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{R^2+\omega^2 L^2} \cdot e^{j\varphi}}{\sqrt{A^2+\omega^2 C^2} \cdot e^{j\psi}}} = \sqrt[4]{\frac{R^2+\omega^2 L^2}{A^2+\omega^2 C^2}} \cdot e^{j\frac{\varphi-\psi}{2}} \ldots\ldots \text{Impedans. (46).}$$

altsaa

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{a^2+b^2} &= \sqrt[4]{\frac{R^2+\omega^2L^2}{A^2+\omega^2C^2}} \ldots \text{Ohm.} \\ \text{og} \quad \chi &= \frac{\varphi-\psi}{2} = \tfrac{1}{2}\left(arc\,tg\,\frac{\omega L}{R} - arc\,tg\,\frac{\omega C}{A}\right) \ldots \text{Vinkel.} \end{aligned}\right\} \ldots (47).$$

Man finder let, at χ er Maksimum for $\omega = \sqrt{\frac{RA}{LC}}$; de tilsvarende Værdier for φ og ψ bestemmes ved $tg\,\varphi = \sqrt{\frac{LA}{RC}}$ og $tg\,\psi = \sqrt{\frac{RC}{LA}}$. Heraf følger, at $\varphi + \psi = 90^0$, og indsættes dette samt $\omega = \sqrt{\frac{RA}{LC}}$ i det sidste Udtryk i Ligning (40), faar man $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{AL+RC}{2}} \cdot \sqrt{\frac{RA}{LC}}$; endvidere er $\chi = -45^0 + \varphi = -45^0 + arc\,tg\sqrt{\frac{LA}{RC}}$, hvilket altsaa er den største numeriske Værdi, χ kan antage.

For $\omega = 0$ og $\omega = \infty$ er $b = 0$. For en mellemliggende Værdi af ω maa b derfor være Maksimum eller Minimum. Gennem nogle Regninger findes let, at b antager den numerisk største Værdi, nemlig

$$b = -\frac{RC-AL}{\sqrt{8AC(RC+AL)}},$$

for

$$\omega^2 = \frac{A^2}{C^2} \cdot \frac{4R^2C^2-(RC+AL)^2}{(RC+AL)^2-4A^2L^2}.$$

b). Af de sekundære Konstanter kan de primære Konstanter let findes; Ligningerne

$$\alpha+j\beta = \sqrt{(R+j\omega L)(A+j\omega C)}, \text{ og } a+jb = \sqrt{\frac{R+j\omega L}{A+j\omega C}},$$

giver

$$A+j\omega C = \frac{\alpha+j\beta}{a+jb}, \text{ og } R+j\omega L = (\alpha+j\beta)(a+jb);$$

hvoraf faas:

$$\left.\begin{aligned} R &= a\alpha - b\beta;\ A = \frac{a\alpha+b\beta}{a^2+b^2}; \\ \omega L &= a\beta + b\alpha;\ \omega C = \frac{a\beta-b\alpha}{a^2+b^2}. \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots (48).$$

§ 9. *Tilnærmelsesformler for de sekundære Konstanter.*

a). For tykke, godt isolerede Luftledninger har man $R \ll \omega L$ og $A \ll \omega C$; det samme gælder som Regel Ledninger med kunstig forhøjet Selvinduktion.

Eks. $d = 4$ mm, $D = 400$ mm. $R = 2{,}8$ Ohm, $L = 2{,}22 \cdot 10^{-3}$ H., $C = 5{,}2 \cdot 10^{-9}$ F., $A = 2 \cdot 10^{-6}$ Siemens, $\omega L = 11{,}1$, $\omega C = 26 \cdot 10^{-6}$.

I saadanne Tilfælde er med Tilnærmelse

$$Z = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = \text{ca. } \sqrt{\frac{L}{C}} \ldots\ldots \text{Ohm. (49).}$$

For Luftledninger, hvor $L = 4\left\{lgn\frac{2D}{d} + \frac{1}{4}\right\} \cdot 10^{-4} \frac{\text{H}}{\text{km}}$ og

$C = \frac{1}{36 \cdot lgn\frac{2D}{d}} \cdot 10^{-6} \frac{\text{F}}{\text{km}}$ bliver

$$Z = 120 \cdot \sqrt{\left\{lgn\frac{2D}{d} + \frac{1}{4}\right\} \cdot lgn\frac{2D}{d}} = \text{ca. } 120\ lgn\frac{2D}{d} \ldots \text{Ohm. (50).}$$

For meget høje Frekvenser altsaa ogsaa for pludselige Stød, Impulser, nærmer Z sig altid til Værdien $\sqrt{\frac{L}{C}}$. Størrelsen $\sqrt{\frac{L}{C}}$ kaldes derfor Ledningens Stød- eller Impulsmodstand, medens $\sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}}$ ofte kaldes Bølgemodstanden svarende til Frekvensen $\frac{\omega}{2\pi}$. (Betegnelsen Bølgemodstand for $\sqrt{\frac{L}{C}}$ er ikke heldig, men bruges hyppig.)

α beregnes af Ligning (42).

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)} + AR - \omega^2 LC}.$$

Her sættes

$$p = \sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)}$$

$$= \omega^2 LC \sqrt{(1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2})(1 + \frac{A^2}{\omega^2 C^2})}$$

$$= \omega^2 LC \cdot \sqrt{1 + \frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \frac{A^2}{\omega^2 C^2} + \frac{A^2 R^2}{\omega^4 L^2 C^2}}; \ldots\ldots \text{(51).}$$

for $R \ll \omega L$ og $A \ll \omega C$ er med Tilnærmelse

$$p = \omega^2 LC \cdot \left(1 + \tfrac{1}{2}\frac{R^2}{\omega^2 L^2} + \tfrac{1}{2}\frac{A^2}{\omega^2 C^2} + \tfrac{1}{4}\frac{A^2 R^2}{\omega^4 L^2 C^2} - \tfrac{1}{8}\frac{R^4}{\omega^4 L^4} - \tfrac{1}{8}\frac{A^4}{\omega^4 C^4}\right);$$

$$2\alpha^2 = AR - \omega^2 LC + p$$

$$= AR + \tfrac{1}{2}R^2\frac{C}{L} + \tfrac{1}{2}A^2\frac{L}{C} - \frac{1}{8\omega^2 LC}\left(R^4 \cdot \frac{C^2}{L^2} + A^4 \cdot \frac{L^2}{C^2} - 2A^2R^2\right)$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right]^2 \cdot \left\{1 - \frac{1}{\omega^2 LC}\left[\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right]^2\right\};$$

hvoraf

$$\alpha = \left[\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right] \cdot \left\{1 - \frac{1}{2\omega^2 LC}\left[\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right]^2\right\} \ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}}. \quad (52).$$

Hyppig kan man nøjes med følgende Tilnærmelse

$$\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{A}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \ldots\ldots\ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}}. \quad (53).$$

Paa tilsvarende Maade findes

$$\beta = \omega\sqrt{LC}\left\{1 + \frac{1}{2\omega^2 LC}\left[\frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} - \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}\right]^2\right\}; \ldots\ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}}. \quad (54).$$

eller med den grovere Tilnærmelse

$$\beta = \omega\sqrt{LC}. \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}}. \quad (55).$$

Hertil svarer

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\text{km}}{\text{sek}}. \quad (56).$$

og

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{LC}} = \frac{1}{n\sqrt{LC}} \ldots\ldots\ldots \text{km}. \quad (57).$$

Indsættes i Formlen (56) de tilnærmede Værdier for L og C for en Dobbeltledning: $L = 4 \cdot lgn\frac{2D}{d} \cdot 10^{-4}\frac{\text{H}}{\text{km}}$ og

$C = \frac{1}{36 \cdot lgn\frac{2D}{d}} \cdot 10^{-6}\frac{\text{F}}{\text{km}}$, faas $v = 3 \cdot 10^5\frac{\text{km}}{\text{sek}}$ lig Lysets Hastighed.

Da baade α og v med Tilnærmelse er uafhængige af ω, er Ledningen omtrent forvrængningsfri.

b). For almindelige, tyndtraadede Telefonkabler gælder med Tilnærmelse $\omega L \ll R$ og $A \ll \omega C$.

Eksempel: $d = 1$ mm; $R = 44{,}6$ Ohm; $L = 0{,}60 \cdot 10^{-3}$ H. $C = 0{,}04 \cdot 10^{-6}$ F; $A = 3 \cdot 10^{-6}$ Siemens; $\omega L = 3$; $\omega C = 2 \cdot 10^{-4}$. Under disse Forhold faas følgende Tilnærmelsesformel for Z:

$$Z = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = \sqrt{\frac{R}{j\omega C}} = \sqrt{\frac{R}{\omega C}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = \sqrt{\frac{R}{2\omega C}} - j\sqrt{\frac{R}{2\omega C}} \quad (58).$$

Tilnærmelsens Godhed fremgaar af ovenstaaende Eksempel, for hvilket man har $Z_{\text{tiln.}} = \sqrt{\frac{R}{\omega C}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = 472 \cdot \angle 45^0$, medens $Z = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{A + j\omega C}} = 473 \angle 43^0\ 4'$.

For α og β faas følgende Tilnærmelsesformler:

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)} + AR - \omega^2 LC}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{2} \cdot CR} \cdot \left(1 - \frac{\omega L}{2R} + \frac{A}{2\omega C}\right) \ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}} \quad (59).$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{2} \cdot CR} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}} \quad (60).$$

$$\beta = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \sqrt{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2)(A^2 + \omega^2 C^2)} - (AR - \omega^2 LC)}$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{2} \cdot CR} \cdot \left(1 + \frac{\omega L}{2R} - \frac{A}{2\omega C}\right) \ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}} \quad (61).$$

$$= \sqrt{\frac{\omega}{2} \cdot CR} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}} \quad (62).$$

Hertil svarer $v = \frac{\omega}{\beta} = \sqrt{\frac{2\omega}{RC}}$ og $\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\omega}{2} RC}}$.

Som man ser, er baade α og v proportionale med $\sqrt{\omega}$; der er saaledes en stærk Forvrængning.

Eksempel: For $\omega = 5000$, $C = 0{,}04 \cdot 10^{-6}$ F og $R = \frac{44{,}6}{d^2}$ gælder følgende Tilnærmelsesformler: $\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega}{2} \cdot CR} =$

$0{,}01 \cdot \sqrt{R} = \frac{0{,}067}{d}$; $Z = \sqrt{\frac{R}{\omega C}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} = 50 \cdot \sqrt{2R} \cdot \angle 45^0 = \frac{472}{d} \cdot \angle 45^0$;

$$v = \frac{10^6}{2\sqrt{R}} = 74900 \cdot d \frac{\text{km}}{\text{sek}}; \quad \lambda = \frac{200\pi}{\sqrt{R}} = 93 \cdot d \text{ km}.$$

c). For $\omega = 0$ er altid $\alpha = \sqrt{RA}$, $\beta = 0$ og $Z = \sqrt{\frac{R}{A}}$, medens for meget store Værdier af ω de sekundære Konstanter nærmer sig Værdierne $\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$, $\beta = \omega\sqrt{LC}$ og $Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$. Her maa det dog erindres, altid at regne med de effektive Værdier af de primære Konstanter, der kun indenfor meget begrænsede Frekvensomraader kan regnes uafhængige af ω.

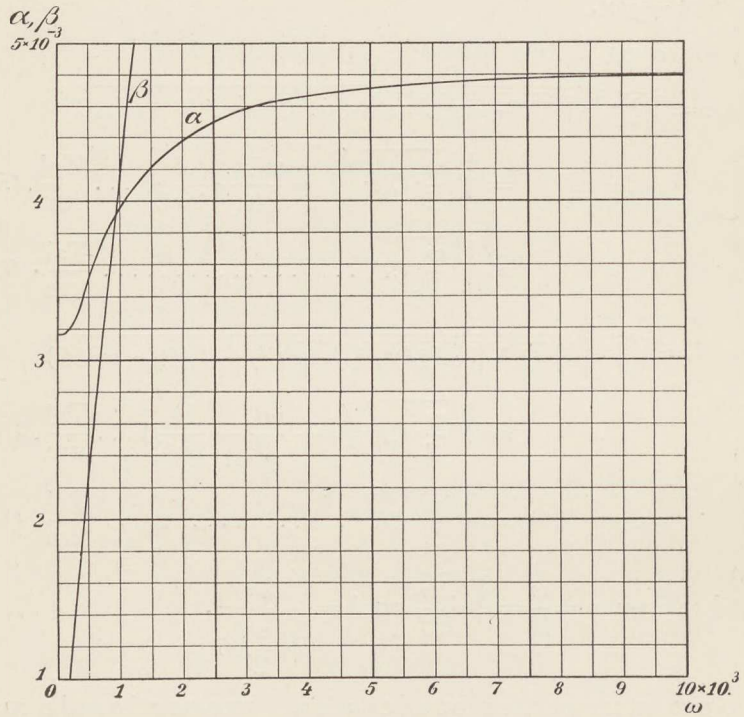


Fig. 14.

Fig. 14 viser Værdien af α (og delvis β) for en Luftledning ($R = 5 \frac{\text{Ohm}}{\text{km}}$, $L = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{km}}$, $C = 5{,}7 \cdot 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{km}}$, $A = 2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Siemens}}{\text{km}}$) og for Frekvensomraadet $0 \leqq \omega \leqq 10^4$, me-

dens Fig. 15 viser Værdien af $Z = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{j\chi}$ for samme Ledning og for det samme Frekvensomraade. Fig. 15 viser tillige Værdierne af Vinklerne φ og ψ.

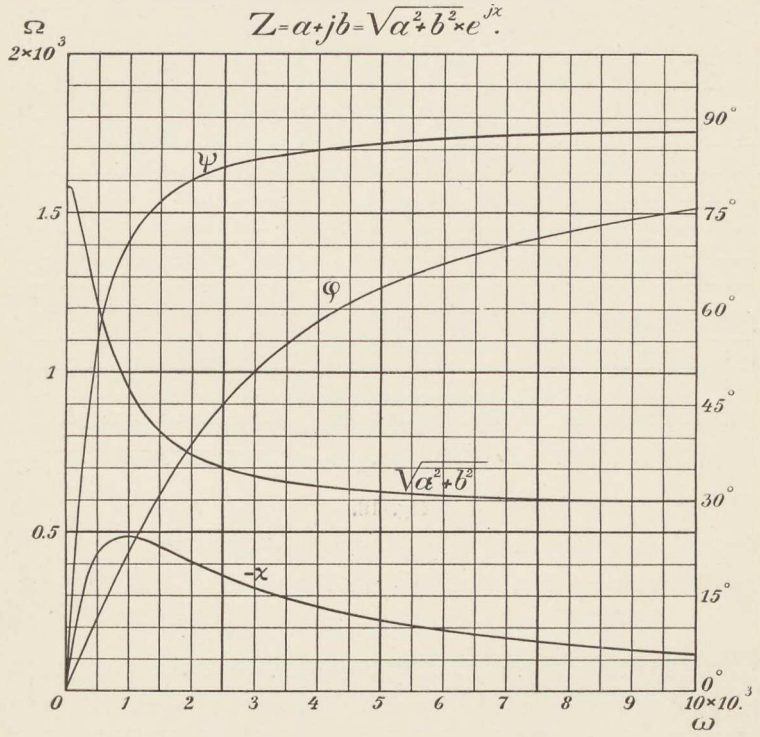


Fig. 15.

Fig. 16 og 17 viser de tilsvarende Kurver for et Telefonkabel ($R = 50 \frac{\text{Ohm}}{\text{km}}$, $L = 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{km}}$, $C = 4 \cdot 10^{-8} \frac{\text{F}}{\text{km}}$, $A = 2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Siemens}}{\text{km}}$) for Frekvensomraadet $0 \leqq \omega \leqq 10^5$.

Ved Beregningen af Kurverne i Fig. 14 til 17 er der gaaet ud fra, at de primære Konstanter er uafhængige af ω. Dette gælder, som nævnt, kun med Tilnærmelse indenfor ret snævre Frekvensomraader; navnlig R vokser meget stærkt med ω for høje Frekvenser. I Fig. 18 er vist Forløbet af α i Frekvensomraadet $10^3 \leqq \omega \leqq 10^7$ for en Luftledning (Dobbeltledning), for hvilken $L = 2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{H}}{\text{km}}$, $C = 5{,}7 \cdot 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{km}}$ og

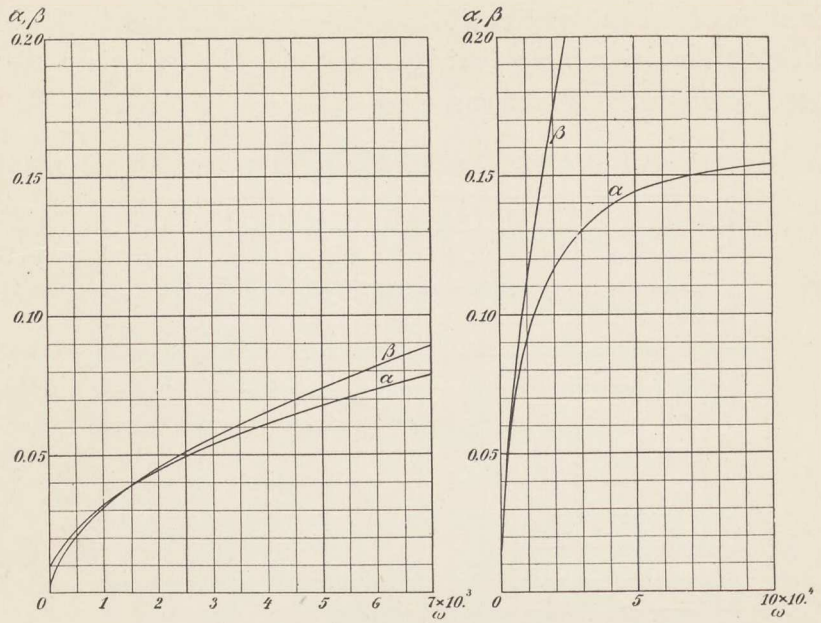

α, β
0.20
0.15
0.10
0.05
β
α
0 1 2 3 4 5 6 7×10.³
ω
α, β
0.20
0.15
0.10
0.05
β
α
0 5 10×10.⁴
ω

Fig. 16.

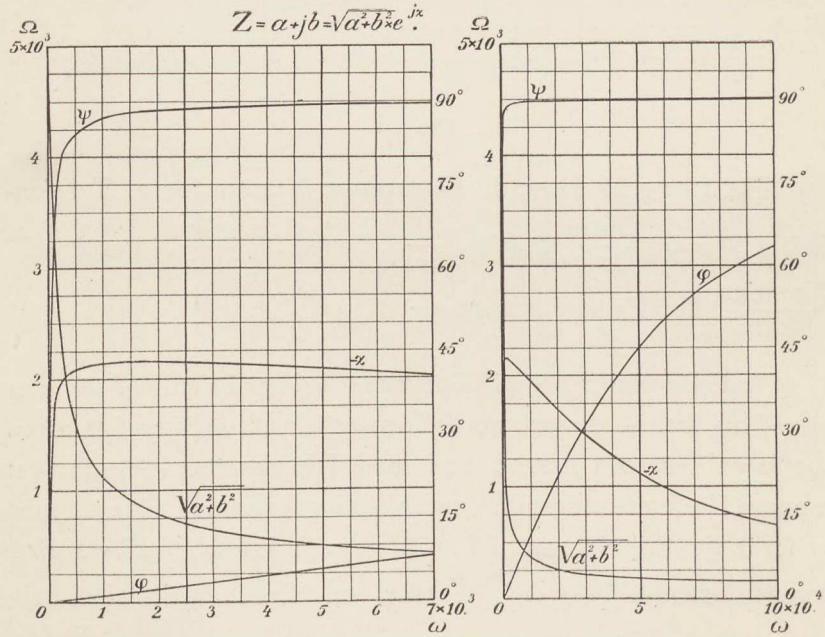

Z = a + jb = √(a²+b²) × e^{jx}
Ω
5×10³
4
3
2
1
0
ψ
90°
75°
60°
45°
30°
15°
0°
x
√(a²+b²)
φ
0 1 2 3 4 5 6 7×10.³
ω
Ω
5×10³
4
3
2
1
0
ψ
90°
75°
60°
45°
30°
15°
0°
φ
x
√(a²+b²)
0 5 10×10.⁴
ω

Fig. 17.

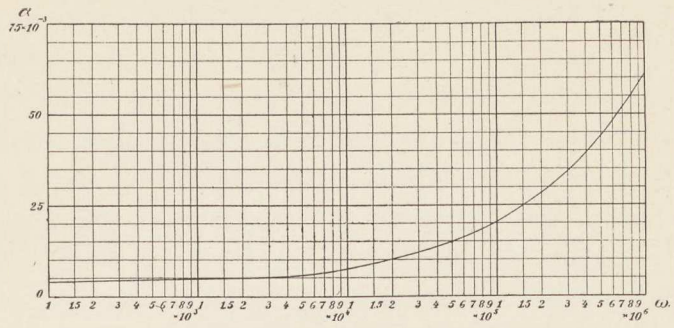


Fig. 18.

$A = 2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Siemens}}{\text{km}}$ regnes konstante, medens $R = R_\omega$ er beregnet efter de i Tillæg IV givne Formler. (Kobbertraadens Diameter $d = 3$ mm.)

§ 10. *Sammensatte Ledninger. Refleksionstab.*

I de foregaaende Betragtninger vedrørende en Vekselstrøms Bevægelse langs en Ledning er denne som Regel forudsat at være uendelig lang; men de i § 2 udledede Resultater for Ledninger af endelig Længde lader sig uden videre overføre til Vekselstrøm. Saaledes bestemmes Refleksionseksponenten ϱ for Overgangen mellem to lange Ledninger (man kalder Ledningerne lange, naar $e^{-\alpha l} \ll 1$) med Karakteristikkerne Z_1 og Z_2 ogsaa her ved Formlen:

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\, lgn \left\{ \tfrac{1}{2} \left[1 + \tfrac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \right] \right\} \ldots \text{Kpl. Tal. (63).}$$

Da Størrelsen $\left\{ \tfrac{1}{2} \left[1 + \tfrac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \right] \right\}$ som Regel her er kompleks, gælder dette ogsaa for ϱ, der følgelig kan gives Formen $\varrho = \varrho_1 + j\varrho_2$; det er dog kun den reelle Del ϱ_1 af denne Størrelse, der har særlig Interesse, og vi sætter derfor:

$$\varrho_1 = \tfrac{1}{2} \cdot \text{den reelle Del af } lgn \left\{ \tfrac{1}{2} \left[1 + \tfrac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \right] \right\}$$

$$= \tfrac{1}{2}\, lgn \left| \left\{ \tfrac{1}{2} \left[1 + \tfrac{1}{2} \left(\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1} \right) \right] \right\} \right|,$$

hvor $| \, |$ betegner den absolute Værdi af den Størrelse, der staar mellem Stregerne. (En Del Formler vedrørende komplekse Størrelser findes i Tillæg II).

Sættes $$\frac{Z_1}{Z_2} = r^{j\varphi},$$

og

$$p = \tfrac{1}{2}\left[1 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{Z_1}{Z_2} + \frac{Z_2}{Z_1}\right)\right],$$

saa er

$$p = \tfrac{1}{4}\left(2 + r \cdot e^{j\varphi} + \frac{1}{r} \cdot e^{-j\varphi}\right) = \tfrac{1}{4}\left(\sqrt{r} \cdot e^{j\frac{\varphi}{2}} + \sqrt{\frac{1}{r}} \cdot e^{-j\frac{\varphi}{2}}\right)^2;$$

men

$$\sqrt{r} \cdot e^{j\frac{\varphi}{2}} + \sqrt{\frac{1}{r}} \cdot e^{-j\frac{\varphi}{2}} = \left(\sqrt{r} + \sqrt{\frac{1}{r}}\right) \cdot \cos\frac{\varphi}{2} + j\left(\sqrt{r} - \sqrt{\frac{1}{r}}\right) \sin\frac{\varphi}{2};$$

altsaa er

$$|p| = \tfrac{1}{4}\left(r + \frac{1}{r} + 2\cos\varphi\right),$$

og følgelig

$$\varrho_1 = \tfrac{1}{2} lgn \frac{r + \frac{1}{r} + 2\cos\varphi}{4} \quad \ldots\ldots\ldots \text{Tal. (64).}$$

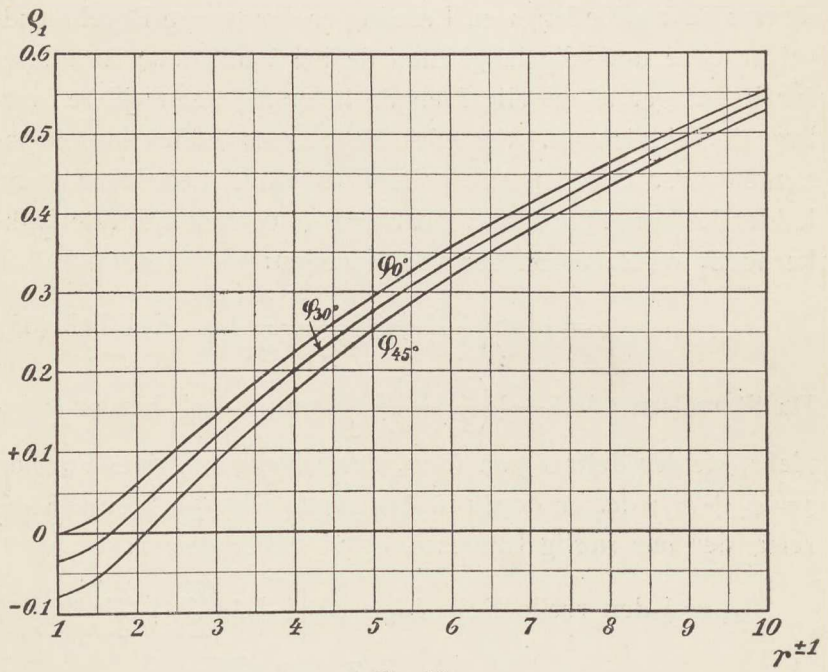


Fig. 19.

Fig. 19 fremstiller Forløbet af ϱ_1 for forskellige Værdier af r og φ; som Regel vil ϱ_1 være positiv og desto større, jo mere r afviger fra 1. Man bør derfor søge at gøre de ab-

solute Værdier af Karakteristikkerne for sammenstødende Ledninger saa nær som muligt lige store.

Forholdene ved Refleksion mellem korte Ledninger er mere indviklede og skal ikke behandles paa dette Sted. (Se iøvrigt § 13). Ved Beregningen af den resulterende Dæmpningseksponent for sammensatte Ledninger bør man, for saa vidt man intet Hensyn tager til Refleksionseksponenterne ϱ_1, forøge $\Sigma \alpha l$ med 5 à 10 %, altsaa sætte den resulterende Dæmpningseksponent til $1{,}_{05} \cdot \Sigma \alpha l$ à $1{,}_{10} \cdot \Sigma \alpha l$; den største Værdi benyttes for Ledningsnet sammensat af korte Ledninger med stærkt varierende Karakteristikker.

§ 11. *Korte Ledninger. Overgangen til den stationære Tilstand.*

Vi vil nu gaa over til at undersøge Forholdene, naar $e^{-\alpha l}$ ikke kan betragtes som meget lille i Sammenligning med 1. De nedenfor fundne Udtryk gælder altsaa i Almindelighed baade for korte og for lange Ledninger.

Vi betragter en Ledning med Længden l og Konstanterne $\gamma = \alpha + j\beta$ og Z; paa Sendestationen er Ledningen forbunden med en Vekselstrømsgenerator, der frembringer en E.M.K. $e = E_m \cdot e^{j\omega t}$; for Simpelheds Skyld forudsættes det endvidere, at Generatorens Impedans er Nul. Paa Modtagerstationen er til Ledningen knyttet et Modtageapparat med Impedans M. Det forudsættes foreløbigt, at Z er reel, og Ledningen altsaa forvrængningsfri.

Generatoren tænkes tilsluttet netop i et Øjeblik, hvor Spændingen er Nul; saa snart Tilslutningen er sket, vil der ud ad Ledningen vandre en sinusformet Strøm- og Spændingsbølge med Hastigheden $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, og af denne Bølge vil en Del tilbagekastes ved Modtagerstationen. For denne Tilbagekastning kan Resultaterne fra § 2 anvendes uforandret, saaledes at man med de tilsvarende Betegnelser har:

$$i_r = i_i \cdot \frac{Z-M}{Z+M} = i_i \cdot r \text{ og } v_r = -v_i \cdot \frac{Z-M}{Z+M} = -v_i \cdot r = -Z \cdot i_r, \quad (65).$$

hvor $r = \frac{Z-M}{Z+M}$ er Refleksionskoefficienten. Særlig Interesse har de to Tilfælde $M = \infty$ og $M = o$ svarende til, at Ledningen er henholdsvis afbrudt og kortsluttet i Afstanden l fra Sendestationen. Af (65) følger, at for $M = \infty$ er

$$i_r = -i_i \quad \text{og} \quad v_r = v_i, \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (66).$$

medens for $M = o$

$$i_r = i_i \quad \text{og} \quad v_r = -v_i \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (67).$$

Rigtigheden af (66) og (67) ses ogsaa umiddelbart: naar Ledningen er afbrudt, maa den resulterende Strøm være lig med Nul, medens Spændingen antager den dobbelte Værdi; for kortsluttet Ledning bliver Spændingen Nul, medens Strømmen fordobles.

Paa Sendestationen kan den afgaaende Spændingsbølge fremstilles ved $v_{o1} = e$, Strømbølgen ved $i_{o1} = \frac{e}{Z}$; naar Bølgen ankommer til Modtageren M er Strøm og Spænding reducerede til

$$i_{l1} = i_{o1} \cdot e^{-\gamma l} \text{ og } v_{l1} = v_{o1} \cdot e^{-\gamma l}. \quad (a)$$

Vi betragter nu det Tilfælde, at Ledningen er afbrudt ved M; den fra dette Punkt reflekterede Bølge fremstilles da ifølge (66) ved:

$$i_{lr1} = -i_{o1} \cdot e^{-\gamma l} \text{ og } v_{lr1} = v_{o1} \cdot e^{-\gamma l}. \quad (b)$$

Den ved (b) fremstillede, reflekterede Bølge bevæger sig ligeledes med Hastigheden $v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ tilbage mod Udgangspunktet A; ankommen til dette fremstilles Strøm og Spænding ved:

$$i_{o2} = -i_{o1} \cdot e^{-2\gamma l} \text{ og } v_{o2} = v_{o1} \cdot e^{-2\gamma l}. \quad (c)$$

Da Ledningen her er kortsluttet, giver disse en reflekteret (fra A til M vandrende) Bølge bestemt ved

$$i_{or2} = -i_{o1} \cdot e^{-2\gamma l} \text{ og } v_{or2} = -v_{o1} \cdot e^{-2\gamma l}; \quad (d)$$

ankommen til M fremstilles denne Bølge ved:

$$i_{l2} = -i_{o1} \cdot e^{-3\gamma l} \text{ og } v_{l2} = -v_{o1} \cdot e^{-3\gamma l}, \quad (e)$$

der reflekteres som

$$i_{lr2} = i_{o1} \cdot e^{-3\gamma l} \text{ og } v_{lr2} = -v_{o1} \cdot e^{-3\gamma l} \quad (f)$$

og saaledes fremdeles.

Den resulterende Spænding v_o ved Afsenderen faas ved Summation af alle de enkelte Komposanter fra Formlerne (c), (d) ...; den bliver:

$$v_o = v_{o1} + v_{o2} + v_{o2r} + v_{o3} + v_{o3r} + \ldots = v_{o1} = e, \ldots \text{ Volt} \quad (68).$$

medens Strømmen i_o ved Afsenderen bliver

$$i_o = i_{o1} + i_{o2} + i_{or2} + i_{o3} + i_{or3} + \ldots$$

$$= i_{o1} \cdot [1 - 2 \cdot e^{-2\gamma l} + 2 \cdot e^{-4\gamma l} - 2 \cdot e^{-6\gamma l} + \ldots]$$

$$= i_{o1} \cdot [1 - 2e^{-2\gamma l}(1 - e^{-2\gamma l} + e^{-4\gamma l} - \ldots)] = i_{o1} \cdot \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}.$$

$$i_o = \frac{v_o}{Z} \cdot \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} = \frac{v_o}{Z} \cdot tgh\, \gamma l \ldots\ldots \text{ Amp.} \times \text{(kompl. Tal).} \quad (69).$$

Paa analog Maade findes Strømmen i_l og Spændingen v_l i Punktet M; man faar

$$i_l = o, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (70).$$

og

$$v_l = v_o \cdot \frac{2}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} = v_o \cdot \frac{1}{cosh\, \gamma l} \ldots \text{Volt} \times \text{(kpl. Tal).} \quad (71).$$

Er Ledningen kortsluttet ved M, findes ved ganske tilsvarende Regninger:

$$v_o = v_{o1} = e, \ldots \text{Volt} \times \text{(kompl. Tal).} \quad (72).$$

$$i_o = \frac{v_o}{Z} \cdot \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} = \frac{v_o}{Z} \frac{1}{tgh\, \gamma l}, \ldots \text{Amp.} \times \text{(kpl. Tal).} \quad (73).$$

$$v_l = o, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (74).$$

$$i_l = i_o \cdot \frac{2}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} = \frac{v_o}{Z} \cdot \frac{2}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}$$

$$= \frac{v_o}{Z} \cdot \frac{1}{sinh\, \gamma l} \ldots \text{Amp.} \times \text{(kpl. Tal).} \quad (75).$$

Kaldes Ledningens Impedans maalt paa Sendestationen for $Z\,(l, M)$, naar der paa Modtagestationen er indskudt et Modtageapparat med Impedansen M, saaledes at Impedansen af den afbrudte Ledning betegnes ved $Z\,(l, \infty)$, af den kortsluttede ved $Z\,(l, o)$, saa er ifølge (68) og (69)

$$Z\,(l, \infty) = \frac{v_o}{i_o} = Z \cdot \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}} = Z \cdot \frac{1}{tgh\, \gamma l}, \ldots \text{Impedans.} \quad (76).$$

medens (72) og (73) giver

$$Z(l, o) = Z \cdot \frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}} = Z \cdot tgh\, \gamma l \ldots \text{ Impedans. (77).}$$

Af (76) og (77) følger

$$Z^2 = Z(l, \infty) \cdot Z(l, o), \ldots\ldots\ldots \text{(Impedans)}^2\text{.(78).}$$

og

$$tgh^2 \gamma l = \left(\frac{e^{\gamma l} - e^{-\gamma l}}{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}\right)^2 = \frac{Z(l, o)}{Z(l, \infty)} \ldots\ldots \text{Kpl. Tal. (79).}$$

Man viser let, at

$$Z\left(\frac{l}{2}, \infty\right) + Z\left(\frac{l}{2}, 0\right) = 2 \cdot Z(l, \infty) \ldots \text{ Impedans. (80).}$$

Af (71) faas Forholdet mellem Spændingen paa Sendestationen og ved Enden af den afbrudte Ledning, nemlig:

$$\frac{v_o}{v_l} = \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} = cosh\, \gamma l; \ldots \text{ Kompl. Tal (81).}$$

tilsvarende faas af (73) og (75) Forholdet mellem den Strøm, der forlader Sendestationen, og Strømmen i den kortsluttede Kabelende, nemlig:

$$\frac{i_o}{i_l} = \frac{e^{\gamma l} + e^{-\gamma l}}{2} = cosh\, \gamma l \ldots \text{ Kompl. Tal. (82).}$$

Ved de foregaaende Betragtninger er der gaaet ud fra, at Ledningen er forvrængningsfri; er dette ikke Tilfældet, bliver Forholdene meget mere indviklede, og en eksakt Fremstilling af den Maade, hvorpaa Strøm og Spænding i Almindelighed vokser op, kræver et matematisk Apparat, der falder langt udenfor denne Bogs Rammer [I. 27, 30]. Naar der er gaaet tilstrækkelig lang Tid, vil Forvrængningens Indflydelse dog blive forsvindende, idet kun den forreste Del af den udgaaende Bølge deformeres i kendelig Grad. Følgelig vil de ovenfor udredede Ligninger gælde for den stationære Tilstand i en vilkaarlig Leder. De vil saaledes gælde ved de sædvanlige Vekselstrømsmaalinger, og man benytter netop hyppigt saadanne Maalinger til Bestemmelse af Telefonledningers sekundære Konstanter. Som Grundlag for disse Maalinger tjener

især de i Formlerne (81), (78) og (79) givne Relationer. Har man saaledes maalt $Z(l, \infty)$ og $Z(l, o)$, giver Formel (78) Værdien af Z, medens Formel (79) bestemmer Værdien af $tgh^2 \gamma l$. Har man derimod maalt sammenhørende Værdier af v_o og v_l, giver Formel (81) Værdien af $cosh \gamma l$. Til Bestemmelse af $\gamma l = (\alpha + j\beta)l$ haves altsaa i de to Tilfælde Ligninger af Formen $tgh^2 \gamma l = A + jB$ og $cosh \gamma l = A + jB$. Løsningen af saadanne Ligninger med Hensyn til α og β er omtalt i Tillæg III. Det nærmere vedrørende Maalingerne skal iøvrigt ikke omtales her [I. 1, 2, 17 b, 21 b].

Medens de fundne Relationer for den stationære Tilstand i en Ledning af vilkaarlig Længde danner et fuldt ud eksakt Grundlag for Vekselstrømsmaalinger paa en saadan Ledning, er disse Relationers Betydning for Bedømmelsen af en Lednings Godhed for Telefonering noget mere tvivlsom. For Talestrømme, der baade hvad Frekvens og Amplitude angaar, er hurtigt varierende, er det tvivlsomt, hvilken Betydning de efter flere Refleksioner fremkomne Strømkomposanter har, om de i det hele bidrager til Talens tydelige Overføring, eller om kun den først ankomne Komposant har Betydning i saa Henseende, medens de senere kun bevirker en ekstra Forvrængning eller Forandring i Klangfarven. En fyldestgørende Udredning af disse Forhold har endnu ikke fundet Sted*).

§ 12. *Almindelige Formler for Ledninger af vilkaarlig Længde. Impedans af Sende- og Modtageapparat.*

a). De i forrige Paragraf udledte Formler kan findes paa en lettere Maade, hvorved man ganske vist gaar Glip af det direkte Indblik i, hvorledes den stationære Tilstand opstaar. Vi har af Formlerne (14) og (65) set, at

---

*) Er Ledningen forholdsvis kort og Modstand og Afledning smaa, kan V_l og I_l blive betydelig større end V_o og I_o (Ferranti-Fænomen). Eks.: $l = 50$ km, $\gamma = 0{,}002 + j0{,}0157$; i saa Fald er, for $M = \infty$, $V_l = 1{,}4\ V_o$. Dette Forhold, der spiller en betydelig Rolle i Stærkstrømsteknikken, har dog kun ringe Betydning for Telefonien.

Refleksionskoefficienten ved Overgangen fra en Ledning med Karakteristikken Z til den til Ledningen hørende Modtager med Impedansen M udtrykkes ved $r = \frac{Z-M}{Z+M}$. I Modtageren kan man imidlertid tænke sig indbefattet et vilkaarligt Stykke, $(l-x)$ km, af selve Lederen, hvis hele Længde er l, og faar saa Refleksionskoefficienten i et vilkaarligt Punkt i Afstanden x fra Afsenderen udtrykt ved

$$r' = \frac{Z - Z(l-x, M)}{Z + Z(l-x, M)} \quad \ldots\ldots \text{ kompl. Tal. (83).}$$

med Betegnelser analoge med de tidligere benyttede. Refleksionskoefficienten r' kan imidlertid ogsaa udtrykkes ved $r' = r \cdot e^{-2\gamma(l-x)}$, idet Bølgerne ved 2 Gange at vandre gennem Strækningen $l-x$ svækkes i Forholdet $e^{-2\gamma(l-x)}$. Man faar altsaa

$$r' = \frac{Z - Z(l-x, M)}{Z + Z(l-x, M)} = r \cdot e^{-2\gamma(l-x)},$$

hvoraf

$$Z(l-x, M) = Z \cdot \frac{1 - r \cdot e^{-2\gamma(l-x)}}{1 + r \cdot e^{-2\gamma(l-x)}}$$

$$= Z \frac{M + Z\, tgh\, \gamma(l-x)}{Z + M\, tgh\, \gamma(l-x)} \quad \ldots \text{ Impedans. (84).}$$

Endvidere maa man i Punktet x have

$$i_x = Z(l-x, M) \cdot v_x,$$

samt (if. (2))

$$-dv_x = i_x \cdot (R + j\omega L) \cdot dx;$$

heraf faas

$$-\frac{dv_x}{v_x} = \frac{R + j\omega L}{Z} \cdot \frac{1 + r \cdot e^{-2\gamma(l-x)}}{1 - r \cdot e^{-2\gamma(l-x)}} \cdot dx,$$

hvilket, idet $\frac{R + j\omega L}{Z} = \gamma$, ved Integration giver

$$v_x = \frac{e^{2\gamma(l-x)} - r}{e^{\gamma(l-x)}} \cdot C.$$

Integrationskonstanten C bestemmes ved, at $v_x = v_o$ for $x = o$, saaledes at man faar

$$v_x = v_o \cdot \frac{e^{-\gamma x} - r \cdot e^{-\gamma(2l-x)}}{1 - r \cdot e^{-2\gamma l}} \quad \ldots\ldots \text{Volt} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (85).$$

Heraf findes

$$i_x = \frac{v_x}{Z(l-x,\ M)} = \frac{v_o}{Z} \cdot \frac{e^{-\gamma x} + r \cdot e^{-\gamma(2l-x)}}{1 - r \cdot e^{-2\gamma l}} \ldots \text{Amp.} \times (\text{kpl.Tal}). \quad (86).$$

Indsættes i disse Formler $x = 0$ eller l og $M = 0$ eller ∞, faas Formlerne (68)—(75), saaledes at man ogsaa ad denne Vej kan komme til de ved Maalingerne benyttede Relationer; men Formlerne (85) og (86) gælder ganske almindeligt for den stationære Tilstand for et vilkaarligt Punkt i en Leder, afsluttet med Modtageren M.

Har Afsenderen Impedansen S, saa er

$$v_o = e - S \cdot i_o$$

eller, ved Hjælp af (86)

$$v_o = e \cdot \frac{Z}{Z+S} \cdot \frac{e^{2\gamma l} - r}{e^{2\gamma l} - r_1 r} \ldots \text{Volt} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (87).$$

idet $r_1 = \frac{Z-S}{Z+S}$ er Refleksionskoefficienten ved Senderen. Man har altsaa

$$v_x = e \cdot \frac{Z}{Z+S} \cdot \frac{e^{-\gamma x} - r \cdot e^{-\gamma(2l-x)}}{1 - r r_1 \cdot e^{-2\gamma l}} =$$

$$e \cdot Z \cdot \frac{Z \cdot \sinh \gamma(l-x) + M \cdot \cosh \gamma(l-x)}{Z(S+M)\cosh \gamma l + (Z^2 + SM)\ \sinh \gamma l} \ldots \text{Volt} \times (\text{kpl.Tal}). \quad (88).$$

og

$$i_x = e \cdot \frac{1}{Z+S} \cdot \frac{e^{-\gamma x} + r \cdot^{-\gamma(2l-x)}}{1 - r r_1 \cdot e^{-2\gamma l}} =$$

$$e \cdot \frac{Z \cdot \cosh \gamma(l-x) + M \sinh \gamma(l-x)}{Z(S+M) \cdot \cosh \gamma l + (Z^2 + SM) \cdot \sinh \gamma l} \ldots \text{Amp.} \times (\text{kpl. Tal}). \quad (89).$$

Af disse to Formler findes let følgende almindelige Udtryk for Forholdene ved Lederens to Ender:

$$i_o = e \cdot \frac{1}{Z+S} \cdot \frac{1 + r \cdot e^{-2\gamma l}}{1 - r r_1 \cdot e^{-2\gamma l}} =$$

$$e \cdot \frac{Z \cdot \cosh \gamma l + M \sinh \gamma l}{Z(S+M)\cosh \gamma l + (Z^2 + MS)\sinh \gamma l} \ldots \text{Amp.} \times (\text{kpl. Tal}). \quad (90).$$

$$v_o = e \cdot \frac{Z}{Z+S} \cdot \frac{1 - r \cdot e^{-2\gamma l}}{1 - rr_1 \cdot e^{-2\gamma l}} =$$

$$e \cdot Z \cdot \frac{Z \cdot \sinh \gamma l + M \cosh \gamma l}{Z(S+M)\cosh \gamma l + (Z^2 + MS)\sinh \gamma l} \cdot \cdot \text{ Volt} \times (\text{kpl. Tal}). \quad (91).$$

$$i_l = e \cdot \frac{1}{Z+S} \cdot \frac{(1+r) \cdot e^{-\gamma l}}{1 - rr_1 \cdot e^{-2\gamma l}} =$$

$$e \cdot \frac{Z}{Z(S+M) \cdot \cosh \gamma l + (Z^2 + MS) \cdot \sinh \gamma l} \cdot \cdot \text{ Amp.} \times (\text{kpl. Tal}). \quad (92).$$

$$v_l = e \cdot \frac{Z}{Z+S} \cdot \frac{(1-r) \cdot e^{-\gamma l}}{1 - rr_1 \cdot e^{-2\gamma l}} =$$

$$e \cdot \frac{Z \cdot M}{Z(S+M)\cosh \gamma l + (Z^2 + MS)\sinh \gamma l} \cdot \cdot \cdot \text{ Volt} \times (\text{kpl. Tal}). \quad (93).$$

Da Formlen (92) er symmetrisk i S og M ses det, at den i § 2 nævnte Reciprocitetssætning ogsaa gælder her.

Ifølge § 1a Ligningerne (3″) kan (88) og (89) ogsaa skrives:

$$i_x = i_o \cosh \gamma x - \frac{v_o}{Z} \sinh \gamma x \ \ldots \text{ Amp.} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (88').$$

$$v_x = v_o \cosh \gamma x - Z\, i_o \sinh \gamma x, \ \ldots \text{ Volt} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (89').$$

der ogsaa kan udledes ved Hjælp af (90) og (91).

Bortelimineres S og M af de fire Ligninger (90)—(93) faar man:

$$v_o = i_o \cdot \frac{Z}{tgh\, \gamma l} - i_l \cdot \frac{Z}{\sinh \gamma l} \cdot \cdot \text{ Volt} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (94).$$

$$v_l = i_o \cdot \frac{Z}{\sinh \gamma l} - i_l \cdot \frac{Z}{tgh\, \gamma l} \cdot \cdot \text{ Volt} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (95).$$

eller skrevet paa en anden Maade:

$$i_o = i_l \cosh \gamma l + v_l \cdot \frac{\sinh \gamma l}{Z}, \ \ldots \text{ Amp.} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (96).$$

$$v_o = v_l \cosh \gamma l + i_l \cdot Z \cdot \sinh \gamma l \ \ldots \text{ Volt} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (97).$$

Disse 4 Relationer mellem Strøm og Spænding for Enderne af et Ledningsstykke gælder ganske almindeligt, uafhængig af Ledningens Længde og af

Beskaffenheden af de Ledninger eller Apparater, der er knyttede til Ledningens Ender. Skrives de paa Formen

$$\left.\begin{aligned} i_o &= A_1 i_l + B v_l \\ v_o &= A_2 v_l + C i_l \end{aligned}\right\}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (98).$$

har man for et homogent Ledningsstykke

$$A_1 = A_2 = A \text{ og } A^2 - BC = 1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (99).$$

Formlerne (98) gælder imidlertid, som det senere vises, ogsaa for et inhomogent Ledningsstykke, og i saa Fald har man

$$A_1 A_2 - BC = 1. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (100).$$

b). Vi skal nu gaa over til at finde Udtryk for den Effekt, der tilføres Modtageren. Har denne Impedansen $M = m + jp$, vil Spændingen e_l være Vinklen φ forud for Strømmen i_l, hvor $tg\,\varphi = \frac{p}{m}$ og altsaa $cos\,\varphi = \frac{m}{\sqrt{m^2 + p^2}}$; den Modtageren tilførte Effekt bliver følgelig bestemt ved

$$P = \tfrac{1}{2} cos\,\varphi \cdot I_{lm} \cdot V_{lm} = \frac{m}{2\sqrt{m^2 + p^2}} \cdot I_{lm}\ V_{lm}, \ldots \text{Watt.} \quad (101).$$

hvor $I_{lm} = |i_l|$ og $V_{lm} = |v_l|$ er bestemte ved (92) og (93). For $M = S = Z$ reduceres (92), (93) og (101) til:

$$i_l = e \cdot \frac{e^{-\gamma l}}{2Z};\ v_l = e \cdot \frac{e^{-\gamma l}}{Z};\ P = E_m \cdot \frac{a}{8(a^2 + b^2)} e^{-2\alpha l} \ldots \text{Watt.} \quad (102).$$

I Almindelighed vil man dog ved passende Valg af S og M kunne opnaa gunstigere Resultater; de heldigste Værdier for disse vil afhænge af Lederens Længde. Da det imidlertid er vigtigst, at Forholdene ved lange Ledninger afpasses saa godt som muligt, vil vi indskrænke os til at betragte saadanne.

For $e^{-\alpha l} \ll 1$ reduceres (92) og (93) til

$$i_l = e \cdot \frac{2Z}{(Z+S)\cdot(Z+M)} \cdot e^{-\gamma l},$$

og

$$v_l = e \cdot \frac{2ZM}{(Z+S)\cdot(Z+M)} e^{-\gamma l}.$$

I saa Fald bliver det almindelige Udtryk for P (if. (101))

$$P = 2E_m^2 \cdot e^{-2\alpha l} \cdot \left| \frac{Z^2 m}{(Z+S)^2 \cdot (Z+M)^2} \right| \ldots \text{Watt.} \quad (103).$$

Antages $S=o$, faar P sin største Værdi, nemlig

$$P=E_m^2\cdot\frac{e^{-2\alpha l}}{2a},\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Watt. (104).}$$

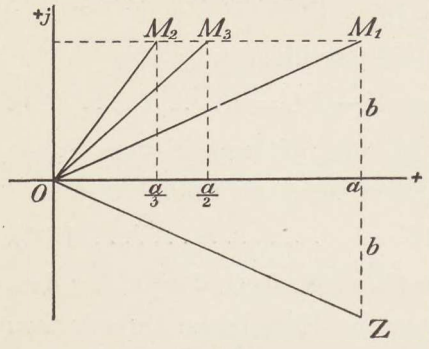


Fig. 20.

for $m=a$ og $p=-b$, altsaa for $M=a-jb$ (M_1 i Fig. 20); vælges derimod $M=a+jb=Z$, saa faar P følgende Værdi

$$P=E_m^2\cdot\frac{a}{2(a^2+b^2)}\cdot e^{-2\alpha l}.$$
$$\ldots\ldots\text{Watt. (105).}$$

Størst Interesse har dog det Tilfælde, hvor Afsender og Modtager er ens byggede, saaledes at $S=M$; i saa Fald er

$$P=2\cdot E_m^2\cdot e^{-2\alpha l}\cdot\left|\frac{Z^2m}{(Z+M)^4}\right|.\ \ldots\ldots\text{Watt. (106).}$$

Regnes som foran med E_m konstant, bliver P i dette Tilfælde Maksimum for $m=s=\frac{a}{3}$ og $p=q=-b$ (M_2, Fig. 20); den dertil svarende Værdi af P er

$$P=\frac{27}{128}\cdot E_m^2\cdot\frac{a^2+b^2}{a^3}\cdot e^{-2\alpha l}\ldots\ldots\text{Watt. (107).}$$

Gaar vi derimod ud fra, at den E.M.K. i Senderen er proportional med $\sqrt{|Z+S|}=\sqrt{|Z+M|}$, en Forudsætning, der hyppig med Tilnærmelse vil være opfyldt, bliver P Maksimum for $p=q=-b$ og $m=s=\frac{a}{2}$ (M_3, Fig. 20); man faar da

$$P=\frac{16}{81}\cdot E_m^2\cdot\frac{a^2+b^2}{a^3}\cdot e^{-2\alpha l}\ldots\ldots\text{Watt. (108).}$$

Under disse Forhold er $Z+S$ reel, og den gjorte Antagelse om den E.M.K. i Senderen svarer til, at den i Senderen frembragte Effekt er uafhængig af Værdien af S.

Ved Udregningen af det i Formel (106) forekommende Udtryk $\left|\frac{Z^2m}{(Z+M)^4}\right|$ kan man ofte med Fordel benytte en gra-

fisk Fremstilling som den i Fig. 21 viste, der giver Værdien af $|Z+M|$.

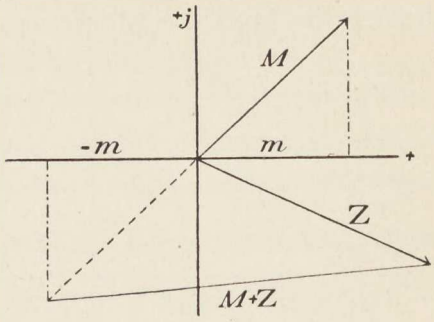


Fig. 21.

Det er naturligvis ikke altid, man kan sørge for, at Impedansen af Sender og Modtager har de i Forhold til Ledningen gunstigst mulige Værdier; men mindre Afvigelser fra disse vil dog ikke have stor Indflydelse paa Værdien af P. Til Belysning af dette Forhold tjener Fig. 22, der viser, hvorledes $\left|\frac{Z^2 m}{(Z+M)^4}\right|$ afhænger af Impedansen af Sende- og Modtageapparaterne, idet der ved denne Figur er forud-

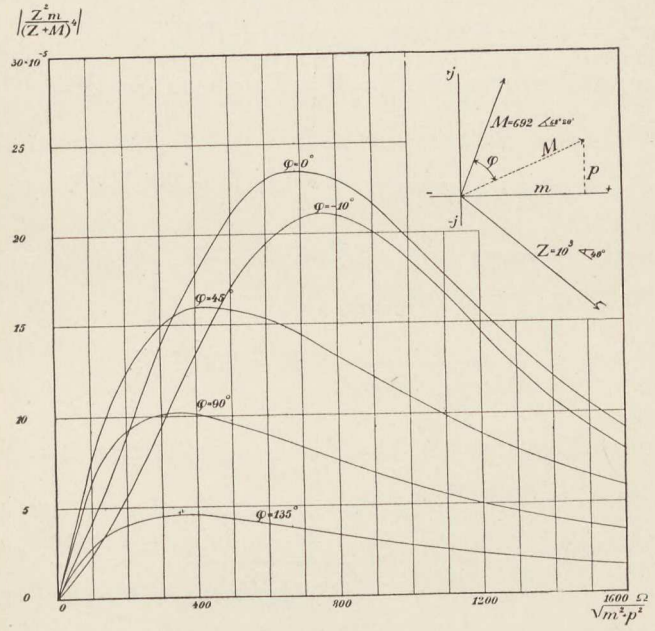


Fig. 22.

sat, at S og M er lige store, samt at Ledningen er lang, saaledes at P er bestemt ved Udtrykket (106).

Værdierne for P i Formlerne (104), (105), (107) og (108) gælder kun for lange Ledninger; for at anskueliggøre Forholdet for korte Ledninger er der i Fig. 23 vist Forløbet af

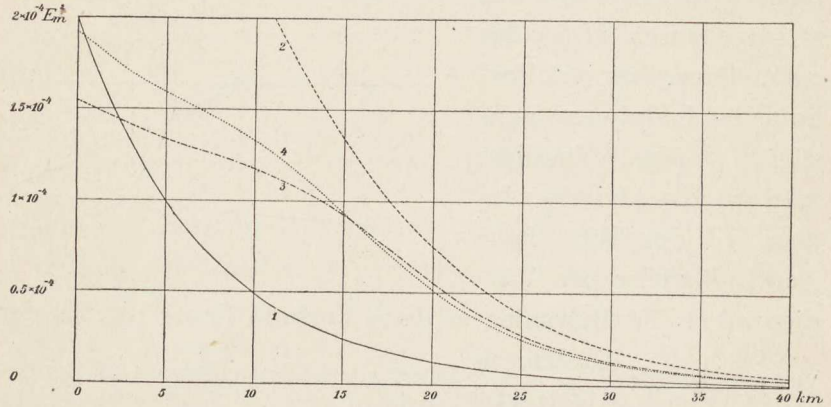


Fig. 23.

P i disse 4 Tilfælde for en Ledning med de sekundære Konstanter $Z = 400 - j300$ og $\gamma = 0{,}070 + j0{,}075$.

Kurve 1 svarer til $S = M = Z$; altsaa $S = M = 400$ Ohm, $q = p = -300$ Ohm.

$$i_l = \frac{e}{2(400 - j300)} \cdot e^{-0{,}071}; \quad P_l = 200\,|I_{lm}|^2.$$

Kurve 2 svarer til $S = o$; $M = a - jb$; altsaa $s = o$, $q = o$, $m = 400$ Ohm, $p = 300$ Ohm.

$$i_l = \frac{e}{400\,e^{\gamma l} + 300^{-\gamma l}}; \quad P_l = 200\,|I_{lm}|^2.$$

Kurve 3 svarer til $S = M = \frac{a}{3} - jb$; altsaa $s = m = \frac{400}{3}$ Ohm; $q = p = 300$ Ohm.

$$i_l = \frac{9}{200} \cdot \frac{(4 - j3) \cdot e}{64\,e^{\gamma l} + (65 + j72)e^{-\gamma l}}, \quad P = \frac{200}{3}\,|I_{lm}|^2.$$

Kurve 4 svarer til $S = M = \frac{a}{2} - jb$; altsaa $s = m = 200$ Ohm; $p = q = 300$ Ohm.

$$i_l = \frac{1}{200} \cdot \frac{(4 - j3)e}{9e^{\gamma l} + (8 + j6)e^{-\gamma l}}, \quad P = 100\,|I_{lm}|^2.$$

Det foregaaende viser, at den optagne Effekt i ret høj Grad afhænger af Sende- og Modtageapparaternes Impedanser. Vil man sammenligne Ledningers Godhed ved Taleforsøg, bør man følgelig dertil anvende Apparater af samme Konstruktion som de i Praksis benyttede.

Ved Taleforsøg eller paa anden Maade kan man med de samme Apparater og for den samme Ledning bestemme Forholdet $\frac{P_2}{P_1}$, hvor P_1 er den optagne Effekt, naar Ledningens Længde er l_1, P_2 Effekten for l_2. I Almindelighed vil da Forholdet $\frac{P_2}{P_1}$ kun være lig med $e^{-2\alpha(l_1-l_2)}$, naar baade l_1 og l_2 er lange ($l_1 < l_2$). Er derimod l_1 kort, kan Forholdet $\frac{P_2}{P_1}$ være meget forskellig fra $e^{-2\alpha(l_1-l_2)}$. Man har ikke altid haft Opmærksomheden henvendt paa dette Forhold.

§ 13. *Ækvivalentledere.*

Man ser umiddelbart, at Strøm og Klemspænding for Sender og Modtager ved den i Fig. 24 viste ⊤-Leder med Impedanserne X_1, X_2 og Y altid vil være de samme som ved

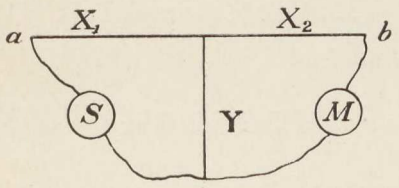


Fig. 24.

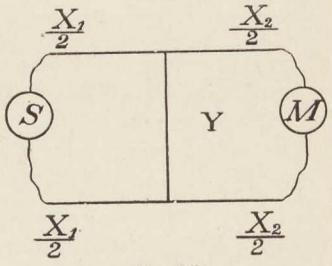


Fig. 25.

den i Fig. 25 viste ⊥-Leder, og det for vilkaarlige Værdier af Senderens og Modtagerens Impedanser; Vekselvirkningen mellem Sender og Modtager er altsaa altid den samme i de to Tilfælde. Man siger derfor, at de to Ledere er ækvivalente med Hensyn til Sender og Modtager. Paa samme Maade er den i Fig. 26 viste □-Leder ækvivalent med ▽-Lederen i Fig. 27 med Hensyn til S og M.

Vi vil nu gaa over til at undersøge Betingelserne for, at

⊤-Lederen i Fig. 24 er ækvivalent med den i Fig 27 viste ▽-Leder. Som sædvanlig antages, at der virker en E.M.K. e i Senderen; dennes Klemspænding kaldes v_S og Strøm-

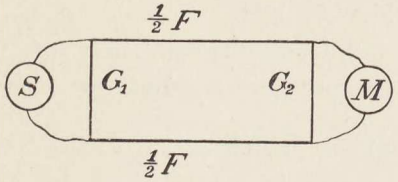


Fig. 26.

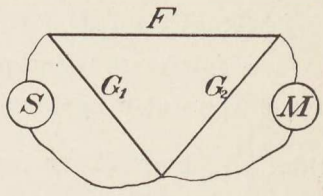


Fig. 27.

men i_S; de tilsvarende Størrelser ved Modtageren kaldes v_M og i_M.

Det ses let, at man for den stationære Tilstand i ⊤-Lederen har

$$v_S = (X_1 + Y)\cdot i_S - Y\cdot i_M, \quad \ldots\ \text{Volt} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (109).$$

og

$$v_M = Y\cdot i_S - (X_2 + Y)\cdot i_M; \quad \ldots\ \text{Volt} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (110).$$

hvoraf faas

$$i_S = \frac{X_2 + Y}{Y}\cdot i_M + \frac{1}{Y}\cdot v_M, \quad \ldots\ \text{Amp.} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (111).$$

og

$$v_S = \frac{X_1 + Y}{Y}\cdot v_M + \frac{1}{Y}[Y(X_1 + X_2) + X_1X_2]\cdot i_M$$
$$\ldots\ \text{Volt} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (112).$$

For ▽-Lederen har man analogt

$$i_S = v_S\left(\frac{1}{G_1} + \frac{1}{F}\right) - v_M\cdot\frac{1}{F}, \quad \ldots\ \text{Amp.} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (113).$$

og

$$i_M = v_S\cdot\frac{1}{F} - v_M\left(\frac{1}{G_2} + \frac{1}{F}\right); \quad \ldots\ \text{Amp.} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (114).$$

hvoraf man finder

$$i_S = \left(\frac{F}{G_1} + 1\right)\cdot i_M + \left(\frac{F}{G_1G_2} + \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}\right)\cdot v_M$$
$$\ldots\ \text{Amp.} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (115).$$

$$v_S = \left(\frac{F}{G_2} + 1\right)\cdot v_M + F\cdot i_M. \quad \ldots\ \text{Volt} \times (\text{kompl. Tal}). \quad (116).$$

Naar Formlerne (109)—(112) og (113)—(116) skal give de samme Værdier for Strøm og Spænding ved Sender og Modtager, uafhængig af disse Apparaters Impedans, maa Koeffi-

cienterne i (111)—(112) og (115)—(116) have de samme Værdier; følgelig har man:

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{G_1 G_2}{F + G_1 + G_2}, \ldots\ldots\ldots \text{Impedans.} \\ X_1 &= \frac{F \cdot G_1}{F + G_1 + G_2}; \; X_2 = \frac{F \cdot G_2}{F + G_1 + G_2}; \text{ Impedans.} \end{aligned}\right\} (117).$$

og omvendt

$$F = X_1 + X_2 + \frac{X_1 X_2}{Y}; \; G_1 = X_1 + Y + \frac{X_1 Y}{X_2}; \; G_2 = X_2 + Y + \frac{X_2 Y}{X_1}$$

... Impedans. (118).

Ved Hjælp af disse Udtryk kan man altid gaa fra en ⊤-Leder til den dermed ækvivalente ▽-Leder og omvendt; følgelig ogsaa fra en ⊤-Leder til en ⊓-Leder og omvendt.

Skrives Ligningerne (111)—(112) og (115)—(116) paa Formen

$$i_S = A_1 \cdot i_M + B \cdot v_M,$$
$$v_S = A_2 \cdot v_M + C \cdot i_M,$$

saa har man i begge Tilfælde $A_1 A_2 - BC = 1$ i Analogi med Formel (100).

Ledere, der er sammensatte af flere efter hinanden følgende ⊤- eller ⊓-Ledere, kan ved Hjælp af ovenstaaende

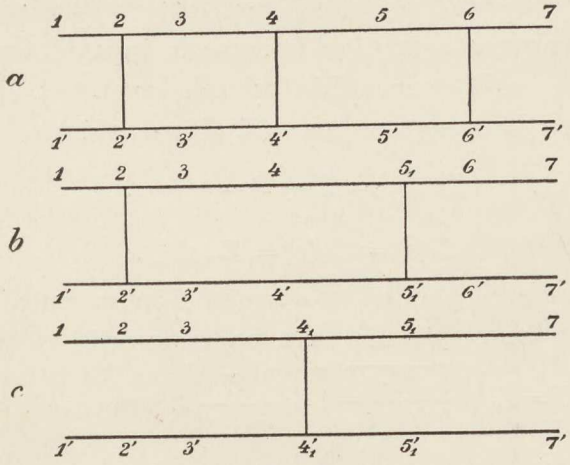


Fig. 28.

altid reduceres til en enkelt ⊤- eller ⊓-Leder. I Fig. 28 er antydet et Eksempel paa en saadan successiv Omformning.

Kaldes Impedansen maalt paa Sendestationen af en ⊤-Leder med Modtager M for $Z_S(M)$, ($Z_S(M)$ er altsaa Impedansen mellem Punkterne a—c, Fig. 24, idet S er afbrudt) og tilsvarende Impedansen mellem b—c (idet M er fjernet, medens S er inde) for $Z_M(S)$, ses det let, at

$$\left.\begin{aligned} &Z_S(\infty) = X_1 + Y;\ Z_S(o) = \frac{Y(X_1 + X_2) + X_1 X_2}{X_2 + Y}, \\ \text{og} \\ &Z_M(\infty) = X_2 + Y;\ Z_M(o) = \frac{Y(X_1 + X_2) + X_1 X_2}{X_1 + Y}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots (119).$$

Disse 4 Impedanser tilfredsstiller altid Relationen

$$\frac{Z_S(o)}{Z_S(\infty)} = \frac{Z_M(o)}{Z_M(\infty)} \ldots\ldots \text{Kompl. Tal. (120).}$$

Løses Ligningerne (119) med Hensyn til X_1, X_2 og Y faas disse udtrykte ved:

$$\left.\begin{aligned} Y &= \sqrt{Z_S(\infty) \cdot [Z_M(\infty) - Z_M(o)]} = \\ &\quad \sqrt{Z_M(\infty) \cdot [Z_S(\infty) - Z_S(o)]} \ldots\ldots \text{Impedans.} \\ X_1 &= Z_S(\infty) - Y = \\ &\quad Z_S(\infty) - \sqrt{Z_M(\infty)[Z_S(\infty) - Z_S(o)]} \ \ldots \text{Impedans.} \\ X_2 &= Z_M(\infty) - Y = \\ &\quad Z_M(\infty) - \sqrt{Z_m(\infty)[Z_S(\infty) - Z_S(o)]} \ \ldots \text{Impedans.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (121).$$

Vi vil nu gaa over til at undersøge, hvorvidt en Telefonledning har en ⊤-formet Ækvivalentleder [I. 1, 4, 17 a]. For en homogen Ledning har man (if. (76) og (77))

$$\left.\begin{aligned} &Z_S(\infty) = Z_M(\infty) = \frac{Z}{tgh\,\gamma l}, \\ \text{og} \\ &Z_S(o) = Z_M(o) = Z \cdot tgh\,\gamma l. \end{aligned}\right.$$

Hvis Ledningen har en ⊤-formet Ækvivalentleder, maa dennes Konstanter følgelig være bestemte ved

$$\left.\begin{aligned} Y &= Z \cdot \sqrt{\frac{1}{tgh^2\,\gamma l} - 1} = \frac{Z}{sinh\,\gamma l} \ldots \text{Impedans.} \\ X_1 &= X_2 = Z\left(\frac{1}{tgh\,\gamma l} - \frac{1}{sinh\,\gamma l}\right) = Z \cdot tgh\,\frac{\gamma l}{2}. \text{ Impedans.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (122).$$

Indsættes disse Værdier for $X_1 = X_2 = X$ og Y i Udtrykkene for v_S og v_M ((109) og (110)), gaar disse Udtryk over til Lig-

ningerne (94) og (95) for v_o og v_l i forrige Paragraf. Den homogene Ledning kan altsaa erstattes med en ⊤-formet Ækvivalentleder med de ovenfor angivne Konstanter.

Den tilsvarende ▽-Leder har Konstanterne

$$F = Z \cdot \sinh \gamma l;\ G_1 = G_2 = G = \frac{Z}{tgh\frac{\gamma l}{2}}. \quad \text{..Impedans. (123).}$$

Mellem Konstanterne for ⊤- og ▽-Lederne bestaar i dette Tilfælde følgende simple Relationer:

$$Y \cdot F = X_2 \cdot G_1 = X_1 \cdot G_2 = Z^2. \quad \text{..(Impedans)}^2. \ (124).$$

Da Z og γ i Almindelighed afhænger af Frekvensen, saa vil ogsaa een og samme Telefonledning for forskellige Frekvenser i Almindelighed fremstilles ved forskellige Ækvivalentledere.

En inhomogen Ledning er i Almindelighed sammensat af et større eller mindre Antal homogene Ledningsstykker. Hver af disse homogene Ledningsstykker kan erstattes af en ⊤-formet Ækvivalentleder, og alle disse ⊤-Ledere kan atter erstattes af en enkelt ⊤-Leder. Vi naar saaledes til det Resultat, at en inhomogen Ledning kan med Hensyn til Ledningens Forhold overfor Sender og Modtager for en konstant Frekvens og under den stationære Strømtilstand erstattes af en ⊤-formet Ækvivalentleder. I Almindelighed bliver X_1 og X_2 forskellige; men er Ledningen symmetrisk med Hensyn til Midtpunktet, saa er $X_1 = X_2 = X$; en saadan ⊤-Leder kaldes symmetrisk. Af det foregaaende følger, at Ligningerne (119), (120) og (121) gælder for en vilkaarlig Telefonledning.

Omvendt kan man ogsaa ombytte en symmetrisk ⊤-Leder med en homogen Ledning, hvis Konstanter Z og γl bestemmes saaledes: Af Ligningerne (122) følger

$$\left.\begin{aligned} \cosh \gamma l &= 1 + \frac{X}{Y}, \ldots \text{ Kompl. Tal.} \\ \text{eller} \quad \gamma l &= lgn\left(1 + \frac{X}{Y} + \sqrt{\frac{X^2}{Y^2} + 2\frac{X}{Y}}\right) \\ &= 2\, lgn\left(\sqrt{\frac{X}{2Y}} + \sqrt{1 + \frac{X}{2Y}}\right), \ldots \text{Kompl. Tal.} \\ \text{og} \quad Z &= \sqrt{X^2 + 2XY} \ldots\ldots \text{Impedans.} \end{aligned}\right\} \ldots (125).$$

Ligeledes kan man ombytte den symmetriske $\bigtriangledown$-Leder med en homogen Leder, idet man af Ligningerne (123) finder

$$\left.\begin{aligned} \cosh \gamma l &= 1 + \frac{F}{G}, \ldots \text{ Kompl. Tal.} \\ \text{og} \quad Z &= \frac{F \cdot G}{\sqrt{F^2 + 2FG}} \ldots\ldots \text{ Impedans.} \end{aligned}\right\} \ldots (126).$$

I begge Tilfælde faar man for den homogene Ledning bestemt Z og Produktet γl, men ikke γ og l særskilt; l kan derfor vælges vilkaarligt.

For tilstrækkelig smaa Værdier af γl kan man sætte $\sinh \gamma l = \gamma l$, $\cosh \gamma l = 1 + \frac{(\gamma l)^2}{2}$ og $tgh \frac{\gamma l}{2} = \frac{\gamma l}{2}$; i saa Fald reduceres Ligningerne (122), (123), (125) og (126) til

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{Z}{\gamma l} = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{A + j\omega C} \ldots \text{ Impedans.} \\ X &= Z \cdot \frac{\gamma l}{2} = \frac{l}{2} \cdot (R + j\omega L); \ldots \text{Impedans.} \\ \gamma l &= \sqrt{\frac{2X}{Y}}, \ldots\ldots\ldots \text{Kompl. Tal.} \\ Z &= \sqrt{2XY} \ldots\ldots\ldots \text{ Impedans.} \end{aligned}\right\} \ldots (127').$$

$$\left.\begin{aligned} F &= Z \cdot \gamma l = l(R + j\omega L), \ldots \text{Impedans.} \\ G &= \frac{2Z}{\gamma l} = \frac{2}{l} \cdot \frac{1}{A + j\omega C}; \ldots\ldots \text{ Impedans.} \\ \gamma l &= \sqrt{\frac{2F}{G}}, \ldots\ldots\ldots \text{Kompl. Tal.} \\ Z &= \sqrt{\frac{F \cdot G}{2}} \ldots\ldots\ldots \text{ Impedans.} \end{aligned}\right\} \cdot (127'').$$

svarende til, at man for ⊤-Lederne forlægger hele Admittansen $l(A+j\omega C)$ til Midten, ved ▽-Lederen derimod den halve Admittans ved hver Ende.

Vi vil nu tænke os en ⊥-Leder med Konstanterne X_1, X_2 og Y, der ved den ene Ende er forbunden med en homogen Ledning med Karakteristik Z_1 og ved den anden med en homogen Ledning med Karakteristik Z_2 (se Fig. 7, S. 16), og vi vil søge Betingelserne for, at der ikke finder nogen Refleksion Sted ved Overgangen fra disse Ledere til ⊥-Lederen. Vi fandt i § 2, at

$$I_r = I_i \cdot \frac{Z_1 - X_1 - X_2 - Z_2 + \frac{(Z_1 - X_1)(Z_2 + X_2)}{Y}}{Z_1 + X_1 + X_2 + Z_2 + \frac{(Z_1 + X_1)(Z_2 + X_2)}{Y}};$$

for at I_r skal være Nul, maa Tælleren være Nul, d. v. s.

$$Y(Z_1 - X_1 - X_2 - Z_2) + (Z_1 - X_1)(Z_2 + X_2) = o. \quad \ldots (128).$$

Hvis der heller ingen Refleksion maa finde Sted ved Overgangen fra den anden homogene Ledning til ⊥-Lederen, maa man ogsaa have:

$$Y(Z_2 - X_2 - X_1 - Z_1) + (Z_2 - X_2)(Z_1 + X_1) = o. \quad \ldots (129).$$

Ved Addition af disse to Ligninger faas

$$Z_1 \cdot Z_2 = Y(X_1 + X_2) + X_1 X_2,$$

hvoraf, ved Benyttelse af de ved (121) givne Udtryk for X_1, X_2 og Y, faas

$$Z_1 Z_2 = Z_S(\infty) \cdot Z_M(\infty) - Y^2 = Z_S(\infty) \cdot Z_M(o) = Z_S(o) \cdot Z_M(\infty).$$

Denne Betingelse er tilfredsstillet, hvis man sætter

og

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{Z_S(o) \cdot Z_S(\infty)}, \ldots\ldots \text{Impedans.} \\ Z_2 &= \sqrt{Z_M(o) \cdot Z_M(\infty)}. \ldots\ldots \text{Impedans.} \end{aligned}\right\} \quad \ldots (130).$$

Indsættelse i Formlerne (128) og (129) viser, at de ved (130) bestemte Værdier af Z_1 og Z_2 tilfredsstiller disse.

Ligningerne (130) danner en Generalisation af Ligning (78). Mellem to homogene Ledninger med Karakteristikkerne Z_1 og Z_2 finder der ingen Refleksion Sted, hverken naar Tilstanden er stationær eller variabel, naar $Z_1 = Z_2$ for alle Værdier af ω. Det samme gælder for to Ledninger, for hvilke

Z_1 er forskellig fra Z_2, og en mellemliggende ⊥-Leder, der for alle Værdier af ω tilfredsstiller (130). Som Regel er (78) og (130) kun opfyldte for en enkelt Frekvens og kun for denne og under den stationære Tilstand findes der da ingen Refleksion.

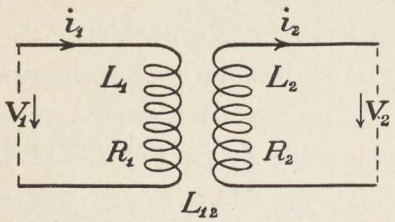


Fig. 29.

Som et andet Eksempel paa Anvendelsen af Ækvivalentledere vil vi betragte en Transformator (Fig. 29), hvis ene Vikling har Impedansen $T_1 = R_1 + j\omega L_1$, medens den anden har Impedansen $T_2 = R_2 + j\omega L_2$; den gensidige Induktionskoefficient kaldes L_{12}, og man indfører Betegnelsen $T_{12} = j\omega L_{12}$. Man ser umiddelbart, at

og
$$\left.\begin{aligned} v_1 &= i_1 \cdot T_1 - i_2 \cdot T_{12}, \\ v_2 &= i_1 \cdot T_{12} - i_2 \cdot T_2. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(131).}$$

Ved Sammenligning med Ligningerne (109) og (110) ses, at Transformatoren kan erstattes med en Ækvivalentleder med Konstanterne

$X_1 = T_1 - T_{12}$; $X_2 = T_2 - T_{12}$ og $Y = T_{12}$ .. Impedans. (132).

Indskydes, som vist i Fig. 30, Kondensatorer, bliver

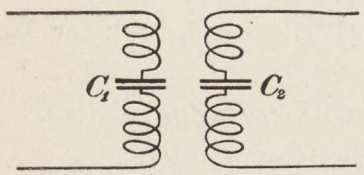


Fig. 30.

$$T_1 = R_1 + j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right),$$

$$T_2 = R_2 + j\left(\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right) \text{ og}$$

$T_{12} = j\omega L_{12}$, men Ligningerne (131) og (132) gælder iøvrigt uforandret.

Man ser let, at

$$Z_1(\infty) = T_1,\ Z_2(\infty) = T_2, \text{ .. Impedans. (133).}$$

og
$$Z_1(o) = T_1 - \frac{T_{12}^2}{T_2},\ Z_2(o) = T_2 - \frac{T_{12}^2}{T_1}.$$

Indføres Betegnelsen $T_{12}^2 = \xi \cdot T_1 T_2$, kan de to sidste Ligninger skrives

$$Z_1(o) = T_1(1-\xi) \text{ og } Z_2(o) = T_2(1-\xi) \text{ .. Imp. (134).}$$

Indsættes disse Udtryk i Formlerne (130) ses det, at Betingelsen for, at der intet Refleksionstab lides, naar Transfor-

matoren indskydes mellem to homogene Ledninger med Karakteristikerne Z_1 og Z_2, er

$$T_1 \cdot \sqrt{1-\xi} = Z_1 \text{ og } T_2 \cdot \sqrt{1-\xi} = Z_2 \ldots\ldots\ldots \quad (135).$$

For saa vidt man ikke indskyder Kondensatorer i Transformatorens Viklinger, maa man i Almindelighed nøjes med at lade (135) gælde for de absolutte Værdier, altsaa sætte

$$|T_1 \cdot \sqrt{1-\xi}| = |Z_1|, \text{ og } |T_2 \cdot \sqrt{1-\xi}| = |Z_2|;$$

hvoraf

$$\left|\frac{T_1}{T_2}\right| = \left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|, \text{ og } |T_1 T_2 - T_{12}^2| = |Z_1 Z_2| \ldots\ldots \quad (136).$$

For en Telefontransformator vil Spredningen i Almindelighed være saa lille, at man kan sætte $L_1 = N \cdot L_{12}$ og $L_2 \cdot N = L_{12}$; endvidere er som Regel $R_1^2 \ll \omega^2 L_1^2$, og $R_2^2 \ll \omega^2 L_2^2$. Ligningerne (136) reduceres da til

$$\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = N = \sqrt{\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right|} \text{ og } \omega(R_1 L_2 + R_2 L_1) = |Z_1 Z_2| \ldots\ldots \quad (137).$$

Sættes $\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$ og $\tau_2 = \frac{L_2}{R_2}$, kan den sidste af disse Ligninger skrives

$$\omega L_1 L_2 \cdot \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) = |Z_1 Z_2|,$$

eller

$$L_{12} = \frac{\sqrt{|Z_1 Z_2|}}{\sqrt{\omega\left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right)}} \ldots\ldots \text{Henry.} \quad (138).$$

Er $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ faas af (137) og (138)

$$\left.\begin{aligned} L_{12} = \sqrt{\frac{\tau}{2\omega}} \cdot \sqrt{|Z_1 Z_2|};\ L_1 = \sqrt{\frac{\tau}{2\omega}} \cdot |Z_1|; \\ L_2 = \sqrt{\frac{\tau}{2\omega}} \cdot |Z_2| \ldots\ldots \text{ Henry.} \\ R_1 = \frac{|Z_1|}{\sqrt{2\tau\omega}};\ R_2 = \frac{|Z_2|}{\sqrt{2\tau\omega}} \ldots\ldots \text{ Ohm.} \end{aligned}\right\} \ldots (139).$$

Ved den foregaaende Behandling af Transformatorens Teori kan man kun tage Hensyn til Tabene i Jernkærnen foraarsagede ved Hvirvelstrømme og Hysterese derved, at man forøger de effektive Modstande R_1 og R_2. For saa vidt angaar Hvirvelstrømstabet, der ved Telefontransformatorer hyppigt er det betydeligste af de nævnte Tab, kan man op-

naa en noget mere tilfredsstillende Behandling ved at opfatte Jernkærnen som et Strømløb for sig med en lille Modstand R_3, en meget lille Selvinduktion L_3 og koblet til Primær- og Sekundærviklingen ved de gensidige Induktionskoefficienter M_{13} og M_{23}. Sættes $T_3 = R_3 + j\omega L_3$, $T_{13} = j\omega M_{13}$, $T_{23} = j\omega M_{23}$ og benyttes iøvrigt de samme Betegnelser som ovenfor faas:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= i_1 T_1 - i_2 T_{12} - i_3 T_{13} \\ v_2 &= i_1 T_{12} - i_2 T_2 - i_3 T_{23} \\ o &= i_1 T_{13} - i_2 T_{23} - i_3 T_3 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (131').$$

Elimineres i_3 faas:

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= i_1\left(T_1 - \frac{T_{13}^2}{T_3}\right) - i_2\left(T_{12} - \frac{T_{13}T_{23}}{T_3}\right) \\ v_2 &= i_1\left(T_{12} - \frac{T_{13}T_{23}}{T_3}\right) - i_2\left(T_2 - \frac{T_{23}^2}{T_3}\right) \end{aligned}\right\} \quad ..(131'').$$

Ved Sammenligning med (109) og (110) ses, at den betragtede Transformator kan erstattes af en ⊤-formet Ækvivalentleder med følgende Konstanter:

$$\left.\begin{aligned} X_1 &= T_1 - T_{12} - \frac{T_{13}}{T_3}(T_{13} - T_{23}) \ldots\ldots \text{Impedans.} \\ X_2 &= T_2 - T_{12} + \frac{T_{23}}{T_3}(T_{13} - T_{23}) \ldots\ldots \text{Impedans.} \\ Y &= T_{12} - \frac{T_{13}T_{23}}{T_3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{Impedans.} \end{aligned}\right\} \quad ..(132').$$

Formlerne (119) og (121) gælder ogsaa i dette Tilfælde.

En nærmere Behandling af Transformatorproblemet vil dog føre for vidt; det anførte tjener kun til at belyse Anvendeligheden af Ækvivalentlederbegrebet ogsaa i mere komplicerede Tilfælde.

Begrebet Ækvivalentledere kan i Virkeligheden anvendes over et meget videre Omraade end det her behandlede, idet man har følgende almindelige Sætning: en vilkaarlig Leder (eller Kombination af Ledere*)), der er forsynet med to Klemmer for Tilslutning af en Afsender og

*) Det er naturligvis en Forudsætning, at der ikke findes Termokræfter, Hysterese eller andet lignende i Ledningssystemet.

to for en Modtager, kan med Hensyn til de nævnte Apparater for en konstant Frekvens og for den stationære Tilstand erstattes af en ⊤-formet Ækvivalentleder, hvis Konstanter er bestemte ved Formlerne (121).

C. Ledninger med forøget Selvinduktion.

§ 14. *Indledning.*

Man kan i Øjeblikket ikke med den for Praksis nødvendige Sikkerhed tale gennem Leduinger, for hvilke $\Sigma \alpha l >$ ca. 4; Grænsen afhænger naturligvis i nogen Grad af de anvendte Apparaters Godhed — hvorfor den ogsaa i Tidens Løb antager større og større Værdier — samt ogsaa stærkt af, i hvilken Grad forstyrrende Bilyde er eliminerede. Trangen til at opnaa Telefonforbindelse over større og større Afstande medfører derfor Ønskeligheden af Konstruktionen af Ledninger med meget smaa Dæmpningskoefficienter, uden at Prisen samtidig bliver alt for høj.

Et andet Forhold virker i lignende Retning. Anbringelsen af de mange Telefonledninger i Form af Luftledninger volder efterhaanden Vanskeligheder baade af Pladshensyn, og ogsaa fordi Luftledninger ifølge deres Konstruktion kan give Anledning til store Driftsforstyrrelser (ved Storm, Isslag o. lign.); det er derfor af mange Grunde hensigtsmæssigere at anvende underjordiske Kabler i Stedet for Luftledninger. Af Bekostningshensyn kan man ikke vælge disse Kabler særlig tyktraadede, og Resultatet bliver derfor, at α bliver meget større end for de tilsvarende Luftledninger. Alle disse Forhold har medført, at Spørgsmaalet om Formindskelse af Telefonledningers Dæmpningseksponent har faaet overordentlig stor Betydning for Udviklingen af Telefonien.

Det vilde maaske ligge nær at søge den nødvendige Forbedring opnaaet gennem en forbedret Konstruktion af Apparaterne, og dette Middel bør naturligvis ogsaa udnyttes fuldt

ud. Følgende Betragtning viser dog at det er ret begrænset, hvad der kan naas ad denne Vej: Tænkes Virkningsgraden af et af de indgaaende Apparater forøget til det firdobbelte, f. Eks. Afsendeapparaterne, saaledes at den afgaaende Strøm alt iøvrigt lige fordobles, saa vil hertil kun svare en Forøgelse af det tilladelige $\Sigma \alpha l$ paa 0,69.

Vi skal derfor gaa over til at betragte de forskellige Midler, man har til Formindskelse af α. Formlen (53) giver følgende Tilnærmelsesudtryk for α:

$$\alpha = \frac{R}{2} \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{A}{2} \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Af disse to Led vil for almindelige Ledere det sidste som Regel være lille i Forhold til det første; skønt man, som det ses, nok kan vinde noget ved Formindskelse af A, bliver Fordelen ikke ret stor.

Det mest nærliggende er at forøge Ledningens Diameter, saaledes at R bliver mindre; denne Metode lader sig dog kun anvende til en vis Grad; thi dels er den dyr, og dels medfører den samtidig en Forøgelse af Ledningens Kapacitet og Formindskelse af dens Selvinduktion, og begge disse Forhold vil medføre, at en Del af den ved Formindskelsen af R opnaaede Nedgang i α atter tabes.

Formlen viser tillige, at en Formindskelse af C vil være heldig. C kan formindskes enten ved at tage tyndere Ledninger, hvad der i denne Sammenhæng er umuligt, eller ved at anbringe dem længere fra hinanden, eller endelig for Kabler ved at benytte et Isolationsmateriale med mindre Dielektricitetskonstant. Afstanden mellem Ledningerne lader sig selvfølgelig selv for Luftledninger ikke forøge udover en vis Grænse, og selv om man ganske vist samtidig med Formindskelsen af C opnaar en Forøgelse af L, ses det dog umiddelbart, at man ikke ad denne Vej kan opnaa ret meget. (Sammenlign Tillæg IX). Det Stof, der har den mindste Dielektricitetskonstant, er Luft; man søger derfor ved Konstruktionen af Kabler at anvende saa lidt Isolationsmateriale som muligt og er derved kommen til de papir-luftisolerede Bly-

rørskabler. Men selv for disse faar man i Almindelighed en Kapacitet paa omtrent 0,04 μF pr. km, og man kan ikke uden upraktisk store Kabelkonstruktioner komme ned under 0,03 μF.

Tilbage har vi af de primære Konstanter kun L, og Formlen viser, at man i Almindelighed vil staa sig ved at forøge L, saalænge det første Led er større end det sidste; da imidlertid for meget store Værdier af L det sidste Led bliver det overvejende, er der øjensynlig en Grænse for, hvor stor en Forøgelse af L man med Fordel kan anvende. Under Forudsætning af, at Forøgelsen af L kan tilvejebringes uden samtidig Forøgelse af Ledningens effektive Modstand — hvad den i Praksis ikke kan — er det let at se, til hvilken Grad man staar sig ved at forøge L. Af Formlen

$$\gamma^2 = (R + j\omega L)(A + j\omega C) \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(a)}$$

faas nemlig ved Differentiation med Hensyn til L

$$2\gamma \cdot d\gamma = (A + j\omega C) \cdot j\omega \cdot dL \ldots\ldots\ldots\ldots \text{(b)}.$$

For den Værdi af L, for hvilken α er Minimum, maa en lille Forandring i L øjensynlig kun bevirke en Forandring i den imaginære Del af γ; Ligning (b) viser da, at γ og $A + j\omega C$ har samme Retning. Af Ligning (a) følger da atter, at $R + j\omega L$ har samme Retning som $A + j\omega C$. Under disse Forhold bliver [I. 17 a]

$$\frac{L}{C} = \frac{R}{A}.$$

Da en Forøgelse af L altid er ledsaget af en Forøgelse af Ledningens effektive Modstand, saa vil man i Praksis ikke staa sig ved at gaa saa langt med Selvinduktionens Forøgelse, som angivet ved dette Udtryk.

Til Forøgelse af Ledningers Selvinduktion anvender man to forskellige Metoder, nemlig enten punktvis indskudte Selvinduktionsspoler (Pupins Metode, 1899 [I.28]) eller en Bevikling af Ledningen med Jerntraad, hvorved opnaas en ensartet fordelt Forøgelse af Selvinduktionen (Krarups Metode, 1902 [I. 20]). En tredie Metode, foreslaaet af Silvanus P. Thompson (1893), gaar ud paa, at dele Ledningen i kortere Stykker forbundne

indbyrdes ved Transformatorer. Da denne Metode ikke har været prøvet i Praksis, skal vi ikke her komme nærmere ind paa den.

§ 15. *Pupin-Ledninger.*

Pupiniseringen tilvejebringes ved i lige store indbyrdes Afstande, s km, at indskyde Spoler med Selvinduktionen L_o (hvoraf ved Dobbeltledning Halvdelen i hver af de to Ledninger). Kaldes Spolens effektive Modstand R_o, saa vil, naar Spolens Konstruktion, d. v. s. dens magnetiske Kreds og Viklingsrum er givet, Forholdet $\eta = \frac{R_o}{L_o}$ tilnærmelsesvis være uafhængigt af de absolutte Værdier af L_o og R_o. Jo mindre η er, desto bedre er Spolen; men da η kun kan formindskes ved Anvendelsen af mere eller bedre Materiale, kan denne Formindskelse kun ske indenfor visse Grænser; i Praksis ligger Værdien af η som Regel imellem 30 og 100.

For at finde Tilnærmelsesformler [I. 1, 2, 7 b, 13, 25] for en Pupin-Lednings Konstanter, vil vi begynde med at betragte en Længde s km af den homogene Ledning før Pupiniseringen; den har da Konstanterne R, L, A, C og s. Denne homogene Ledning kan nu erstattes af en $\perp$-formet Ækvivalentleder, hvis Konstanter, naar s er tilstrækkelig lille, kan bestemmes ved Tilnærmelsesformlerne (127'),

$$\frac{X}{2} = \frac{s}{4}(R + j\omega L) \text{ og } Y = \frac{1}{s(A + j\omega C)}.$$

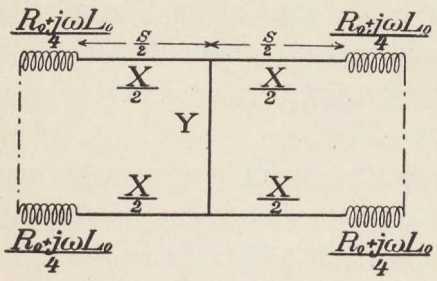


Fig. 31.

Derefter pupiniseres Ledningen, og vi indbefatter i Ækvivalentlederen de tilgrænsende Halvdele af Spolerne; Konstanterne for den derved opstaaede, nye Ækvivalentleder bestemmes ved (se Fig. 31):*)

$$\frac{X_1}{2} = \frac{X}{2} + \frac{R_o + j\omega L_o}{4} \text{ og } Y_1 = Y.$$

*) Den af Spolerne bevirkede Kapacitetsforøgelse er saa ringe, at vi her ser bort fra den.

Denne sidste Ækvivalentleder kan endelig erstattes af en homogen Ledning af Længde s, hvis Konstanter $\gamma_1 s$ og Z_1 bestemmes ved

$$\left.\begin{aligned} \gamma_1 s &= \sqrt{\frac{2X_1}{Y_1}} \\ &= s\cdot\sqrt{\left[R+\frac{R_o}{s}+j\omega(L+\frac{L_o}{s})\right]\cdot(A+j\omega C)},\ldots \text{Kpl. Tal.} \\ Z_1 &= \sqrt{\frac{R+\frac{R_o}{s}+j\omega(L+\frac{L_o}{s})}{A+j\omega C}},\ldots \text{Impedans.} \end{aligned}\right\}\ldots(140).$$

hvorefter samtlige de til Pupin-Ledningen hørende Længder s umiddelbart kan adderes.

Det fremgaar af (140), at en Pupin-Ledning kan erstattes af en homogen Ækvivalentledning med Konstanterne:

$$\left.\begin{aligned} R_1 = R+\frac{R_o}{s};\ L_1 = L+\frac{L_o}{s};\\ A_1 = A;\ C_1 = C. \end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(141).$$

Disse Formler gælder dog kun med Tilnærmelse, idet det i Overensstemmelse med (127) er forudsat, at hele den paa Længden s faldende Admittans uden kendelig Fejl kan tænkes samlet i Midtpunktet.

Under Forudsætning af, at Pupiniseringen er saa stærk, at $R_1 \ll \omega L_1$ og endvidere, at $A \ll \omega C$, faar man ved Hjælp af (140) og (141), idet $\eta = \frac{R_o}{L_o}$:

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= R+\eta\cdot\frac{L_o}{s}\ldots\ldots\ldots\frac{\text{Ohm}}{\text{km}}. \\ Z_1 &= \sqrt{\frac{L_1}{C}}\ldots\ldots\ldots \text{Impedans.} \end{aligned}\right\}$$

og

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{R_1}{2}\sqrt{\frac{C}{L_1}}+\frac{A}{2}\sqrt{\frac{L_1}{C}} \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\left[R\sqrt{\frac{C}{L_1}}+\eta(L_1-L)\sqrt{\frac{C}{L_1}}+A\sqrt{\frac{L_1}{C}}\right] \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\left[(R-\eta L)\cdot\frac{1}{Z_1}+(A+\eta C)\cdot Z_1\right]\ldots\ldots\frac{\text{Tal}}{\text{km}}. \end{aligned}\right\}\ldots(142).$$

Man finder let, at α_1 bliver Minimum for

$$Z_1 = \sqrt{\frac{R-\eta L}{A+\eta C}};$$

de dertil svarende Værdier af L_1 og α_1 er, idet $\frac{A}{\omega C} = \varkappa$:

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \frac{R-\eta L}{\eta + \frac{A}{C}} = \frac{R-\eta L}{\eta+\omega\varkappa}, \ldots\ldots \frac{\text{Henry}}{\text{km}}. \\ \text{eller} \\ \frac{L_o}{s} &= \frac{R-\eta L}{\eta+\omega\varkappa} - L, \ldots\ldots \frac{\text{Henry}}{\text{km}}. \\ \text{og} \\ \alpha_{1\,min} &= \sqrt{(R-\eta L)\cdot(A+\eta C)}; \ldots\ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}}. \end{aligned}\right\} \ldots (144).$$

dette er saaledes den mindste Værdi for α_1, man kan opnaa ved Pupiniseringen.

Sættes

$$\left.\begin{aligned} L_1 &= \varepsilon^2 \cdot \frac{R-\eta L}{\eta+\omega\varkappa}, \ldots\ldots \frac{\text{Henry}}{\text{km}}. \\ \text{og altsaa} \\ Z_1 &= \varepsilon\sqrt{\frac{R-\eta L}{A+\eta C}}, \quad \text{Impedans}. \end{aligned}\right\} \ldots (145).$$

faar man følgende Udtryk for α_1 i Stedet for (142):

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\cdot\alpha_{1\,min}\cdot\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right) \ldots\ldots\ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}}. \quad (146).$$

Eksempel. Indsættes $C = 0{,}04\cdot 10^{-6}\frac{\text{F}}{\text{km}}$, $\eta = 64$, $\omega\varkappa = 80$, faas $\alpha_{1\,min} = 2{,}4\cdot\sqrt{R}$; sættes her $\sqrt{R} = \frac{6{,}67}{D}$, hvor D er Diametren i mm, bliver $\alpha_{1\,min} = \frac{0{,}016}{D}$.

Man har endvidere (for $R_1 \ll \omega L_1$ og $A \ll \omega C$):

$$\left.\begin{aligned} \beta_1 &= \omega\sqrt{L_1 C} = \omega C Z_1, \ldots\ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}}. \\ v_1 &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C}} = \frac{1}{C Z_1}, \ldots\ldots\ldots \frac{\text{km}}{\text{sek}}. \\ \lambda_1 &= \frac{2\pi}{\omega}\cdot\frac{1}{\sqrt{L_1 C}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{C Z_1} \ldots \text{km}. \end{aligned}\right\} \ldots (147).$$

Kaldes Antallet af Spoler pr. Bølgelængde N, og sættes

$$\frac{\lambda_1}{s} = N = \frac{2\pi n_o}{\omega} = \frac{n_o}{n}, \ldots\ldots\ldots \text{Tal}. \quad (148).$$

saa er n_o en Frekvens, der er lige saa mange Gange større end den virkelige Frekvens n, som λ_1 er større end s. Man har da

$$\left.\begin{aligned} s &= \frac{n}{n_o}\cdot\lambda_1 = \frac{1}{n_o C Z_1} \ldots\ldots \text{km.} \\ v_1 &= s\cdot n_o \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\text{km}}{\text{sek}}. \\ sL_1 &= L_o + Ls = \frac{Z_1}{n_o} \ldots. \text{Henry.} \end{aligned}\right\} \ldots (149).$$

Af Ligningen $v_1 = sn_o$ fremgaar, at n_o er det Antal Spoler, som Bølgen passerer pr. Sekund. n_o har ogsaa den Betydning, at $2n_o$ er 2π Gange Egenfrekvensen n_1 for en Svingningskreds, bestaaende af et Sæt Pupinspoler med tilhørende Ledningsstykke (se Fig. 32), idet man har

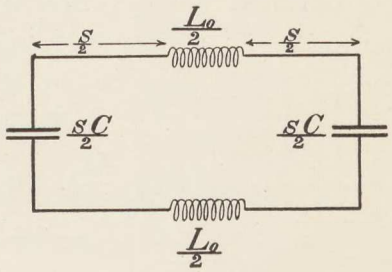


Fig. 32.

$$2\pi n_1 = \frac{1}{\frac{s}{2}\sqrt{L_1 C}} = 2n_o.$$

For $\eta L \ll R$ reduceres Formlen (142) for α_1 til

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\cdot\left[\frac{R}{Z_1} + (A + \eta C)\cdot Z_1\right] = \tfrac{1}{2}\cdot\left[\frac{R}{Z_1} + C(\eta + \omega\varkappa)\cdot Z_1\right], \ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}} \ldots (150).$$

der er Minimum for

$$\left.\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{\frac{R}{\eta C + A}} = \sqrt{\frac{R}{C(\eta + \omega\varkappa)}}, \ldots. \text{Impedans.} \\ \text{og} \qquad L_1 &= \frac{R}{\eta + \frac{A}{C}} = \frac{R}{\eta + \omega\varkappa}, \ldots\ldots\ldots \frac{\text{Henry}}{\text{km}}. \end{aligned}\right\} \ldots (151).$$

hvilket giver

$$\alpha_{1\,min} = \sqrt{R(\eta C + A)} = \sqrt{RC(\eta + \omega\varkappa)} \ldots\ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}}. \quad (152).$$

Disse sidste Formler viser, at for den Pupinisering, der gør α_1 til Minimum, er, alt iøvrigt lige, L_1 proportional med R og Z_1 med $\sqrt{R}$. Man ser tillige, at L_1 og Z_1 skal have desto større Værdier, jo mindre η og $\varkappa$ er. Formel (152) viser,

at det for pupiniserede Ledninger er af største Vigtighed at holde Afledningen saa ringe som muligt. Eksempel: For $R = 5$ Ohm, $C = 0{,}04 \cdot 10^{-6} \frac{\text{F}}{\text{km}}$ og $\eta = 40$ er $\alpha_{1\,min} \sqrt{5(1{,}6 \cdot 10^{-6} + A)}$, hvoraf faas,

at for $A = 0{,}4 \quad 1{,}0 \quad 2{,}0 \quad 3{,}0 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Siemens}}{\text{km}}$.

er den heldigste Værdi for $L_1 = 0{,}100 \quad 0{,}077 \quad 0{,}055 \quad 0{,}0435 \quad \frac{\text{H}}{\text{km}}$.

og tilsvarende $\alpha_{1\,min} = 3{,}16 \quad 3{,}61 \quad 4{,}24 \quad 4{,}80 \cdot 10^{-3} \quad \frac{\text{Tal}}{\text{km}}$.

Formlen for α_1 viser, at denne kun vokser lidt, selv om L_1 og Z_1 afviger betydeligt fra de Værdier, for hvilke α_1 er Minimum. (Se Fig. 33, der viser et Eksempel paa α's Afhængighed af $\frac{L_o}{s}$). Da Spoleafstanden for konstante Værdier af n_o og C er omvendt proportional med Z_1, følger heraf, at man bør vælge en saa tyk Leder, at man kan nøjes med at pupinisere den, indtil man faar en Værdi for α, der er lidt større end $\alpha_{1\,min}$, idet man paa denne Maade ved en ringe Forøgelse af den oprindelige Lednings Tykkelse kan spare en hel Del Spoler.

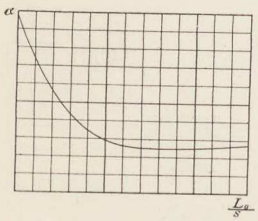


Fig. 33.

§ 16. *Dæmpningskonstantens Afhængighed af Frekvensen ved Pupin-Ledninger* [I. 1, 25].

Formlerne (140) for Pupin-Ledningens Konstanter gælder kun med Tilnærmelse, idet de bygger paa Formlerne (127)

$$X = s \cdot \frac{R + j\omega L}{2}, \quad Y = \frac{1}{s(A + j\omega C)},$$

og

$$\gamma s = \sqrt{\frac{2X_1}{Y_1}}, \quad Z_1 = \sqrt{2X_1 Y_1},$$

i hvilke der er forudsat, at γs er meget lille. Da endvidere Ækvivalentledningens Konstanter, som ovenfor omtalt, varierer med ω, saa giver den i forrige Paragraf udviklede Teori om, hvorledes Konstanterne skal bestemmes for at give den bedst mulige Værdi af α_1, kun et nogenlunde rigtigt Billede

af Forholdene ved en enkelt Frekvens. Vil man derimod undersøge Konstanternes Variation med ω, bliver Regningen langt mere indviklet, hvorfor den her kun gengives i noget sammentrængt Form. Man maa til dette Øjemed gaa ud fra de eksakte Formler (122)

$$X = Z \cdot tgh\frac{\gamma s}{2} \quad \text{og} \quad Y = \frac{Z}{\sinh \gamma s} \ldots \text{Impedans.} \quad (152).$$

Betegnes den virkelige, eksakte Ækvivalentlednings Konstanter, idet Længderne forudsættes at være de samme, med X_1', Y_1', Z_1' og γ_1', faar man altsaa:

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= X + \tfrac{1}{2}(R_o + j\omega L_o);\ Y_1' = Y \ldots \text{Impedans.} \\ \cosh \gamma_1' s &= \frac{X_1' + Y_1'}{Y_1'} \ldots\ldots \text{Kompl. Tal.} \\ \text{og} \qquad Z_1' &= \sqrt{X_1'^2 + 2X_1' Y_1'} \ldots \text{Impedans.} \end{aligned}\right\} \ldots (153).$$

Da vi kan gaa ud fra, at γs er en lille Størrelse, kan vi benytte følgende Rækkeudviklinger:

$$\left.\begin{aligned} tgh\frac{\gamma s}{2} &= \frac{\gamma s}{2} \cdot [1 - \tfrac{1}{12} \cdot \gamma^2 s^2 + \tfrac{1}{120} \cdot \gamma^4 s^4 - \ldots] \ldots \text{Kompl.Tal.} \\ \sinh \gamma s &= \gamma s \cdot [1 + \tfrac{1}{6} \gamma^2 s^2 + \tfrac{1}{120} \cdot \gamma^4 s^4 + \ldots] \ldots \text{Kompl.Tal.} \end{aligned}\right\} \ldots (154).$$

Indføres derpaa Hjælpestørrelserne R', A', L' og C', bestemte ved

$$X = \frac{s}{2}(R' + j\omega L') \quad \text{og} \quad Y = \frac{1}{s(A' + j\omega C')}, \ldots\ldots \text{Impedanser.} \quad (155).$$

faas

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{s}{2}(R' + j\omega L') \\ &= \frac{s}{2} \cdot (R + j\omega L) \cdot [1 - \tfrac{1}{12}\gamma^2 s^2 + \tfrac{1}{120}\gamma^4 s^4 - \ldots] \ldots \text{Impedans.} \\ \frac{1}{Y} &= s(A' + j\omega C') \\ &= s \cdot (A + j\omega C) \cdot [1 + \tfrac{1}{6}\gamma^2 s^2 + \tfrac{1}{120}\gamma^4 s^4 + \ldots] \ldots \text{Admittans.} \end{aligned}\right\} \ldots (156).$$

Af (153) og (155) følger:

$$\left.\begin{aligned} X_1' &= \frac{s}{2}\left(R' + \frac{R_o}{s} + j\omega\left(L' + \frac{L_o}{s}\right)\right), \ldots \text{Impedans.} \\ \frac{1}{Y_1'} &= s(A' + j\omega C'), \ldots\ldots \text{Admittans.} \\ \text{samt} \\ \cosh \gamma_1' s &= 1 + \frac{s^2}{2} \cdot \left[R' + \frac{R_o}{s} + j\omega\left(L' + \frac{L_o}{s}\right)\right] \cdot (A' + j\omega C') \\ &= 1 + 2p^2, \end{aligned}\right\} \ldots (157).$$

hvor

$$p=\frac{s}{2}\cdot\sqrt{\left[R'+\frac{R_o}{s}+j\omega(L'+\frac{L_o}{s})\right]\cdot(A'+j\omega C')}=\frac{s}{2}\cdot\gamma''$$

$$=\frac{s}{2}(\alpha''+j\beta'');\ldots\ldots\text{ Kompl. Tal. (158).}$$

γ'' er her Vandringskonstanten for en homogen Ledning med de primære Konstanter $R'+\frac{R_o}{s}$, $L'+\frac{L_o}{s}$, A' og C'.

Af (125) følger

$$\gamma_1's=2\,lgn\,(p+\sqrt{1+p^2}),\ldots\text{ Kompl.Tal. (159).}$$

heraf er det imidlertid kun den reelle Del, der her har særlig Interesse; for at finde den indføres

$$p=p_o\cdot e^{j\varphi}.$$

I saa Fald er, da $\varphi<\frac{\pi}{2}$ [II. 8]

$$|p+\sqrt{1+p^2}|^2$$

$$=\sqrt{(1-p_o^2)^2+4p_o^2cos^2\varphi}+p_o^2+p_o\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{(1-p_o^2)^2+4p_o^2cos^2\varphi}+p_o^2+cos\,2\varphi}$$

$$=q^2+p_o^2+p_o\sqrt{2}\cdot\sqrt{q^2+p_o^2+cos2\varphi},$$

idet

$$q^2=\sqrt{(1-p_o^2)^2+4p_o^2\,cos^2\varphi}.$$

Følgelig bliver den reelle Del af $\gamma_1's$ lig med:

$$\alpha_1's=lgn\,[q^2+p_o^2+p_o\sqrt{2}\cdot\sqrt{q^2+p_o^2+cos\,2\varphi}]\ldots\text{ Tal. (160).}$$

Dette Udtryk kan imidlertid simplificeres, da man altid har $R'+\frac{R_o}{s}\ll\omega(L'+\frac{L_o}{s})$ og $A'\ll\omega C'$; Vinklen φ nærmer sig derfor til Værdien $\frac{\pi}{2}$, saaledes at $cos\,\varphi$ altid er en lille Størrelse og $cos\,2\varphi$ omtrent lig -1. For Værdier af p_o, der er kendelig mindre end 1, kan man derfor sætte

$$q^2+p_o^2=1+\frac{2p_o^2\,cos^2\varphi}{1-p_o^2}\quad\text{og}\quad\sqrt{q^2+p_o^2+cos\,2\varphi}=\sqrt{2}\cdot\frac{cos\,\varphi}{\sqrt{1-p_o^2}}.$$

(160) reduceres da til

$$\alpha_1's=lgn\left[1+2p_o\frac{cos\,\varphi}{\sqrt{1-p_o^2}}\right]=2p_o\cdot\frac{cos\,\varphi}{\sqrt{1-p_o^2}}\ldots\text{Tal. (161).}$$

Men ifølge (158) er $2\,p_o\,cos\,\varphi=\alpha''s$, hvor α'' er Dæmpningskonstanten i en homogen Ledning med Konstanterne $R'+\frac{R_o}{s}$, $L'+\frac{L_o}{s}$, A' og C'. Ligningen (161) kan altsaa skrives:

$$\alpha_1'=\frac{\alpha''}{\sqrt{1-p_o^2}},\ldots\ldots\ldots\ldots\frac{\text{Tal}}{\text{km}}.\ (162).$$

hvor

$$p_o = \frac{s}{2} \cdot \sqrt[4]{\left[\left(R' + \frac{R_o}{s}\right)^2 + \omega^2\left(L' + \frac{L_o}{s}\right)^2\right] \cdot (A'^2 + \omega^2 C'^2)};$$

eller med Tilnærmelse

$$p_o = \frac{s}{2} \cdot \omega \sqrt{\left(L' + \frac{L_o}{s}\right) \cdot C'}.$$

Tilbage staar nu at bortskaffe de indførte Hjælpestørrelser R', L', A' og C' samt α''. Af Ligningerne (156) findes let følgende Tilnærmelsesformler:

$$R' = R - \frac{s^2}{12}[R^2 A - 2\omega^2 LCR - \omega^2 L^2 A],$$

$$L' = L - \frac{s^2}{12}[2ARL - \omega^2 L^2 C + R^2 C],$$

$$C' = C + \frac{s^2}{6}[2ARC - \omega^2 LC^2 + A^2 L],$$

$$A' = A + \frac{s^2}{6}[RA^2 - 2\omega^2 LCA - \omega^2 C^2 R],$$

der med tilstrækkelig Tilnærmelse yderligere kan reduceres til

$$\left.\begin{aligned} R' &= R \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\text{Ohm}}{\text{km}}. \\ L' &= L - \frac{s^2}{12} R^2 C \ldots\ldots\ldots \frac{\text{Henry}}{\text{km}}. \\ C' &= C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{\text{Farad}}{\text{km}}. \\ A' &= A - \frac{s^2}{6}\omega^2 C^2 R \ldots \frac{\text{Siemens}}{\text{km}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (163).$$

Endvidere har man, da der ovenfor er forudsat $R' + \frac{R_o}{s} \ll \omega(L' + \frac{L_o}{s})$ og $A' \ll \omega C'$, med Tilnærmelse

$$\alpha'' = \frac{R' + \frac{R_o}{s}}{2} \sqrt{\frac{C'}{L' + \frac{L_o}{s}}} + \frac{A'}{2}\sqrt{\frac{L' + L_o}{C'}};$$

her kan man som Regel bortkaste L' i Sammenligning med Pupinspolens Selvinduktion L_o; gøres dette og indføres (163) faas

$$\alpha'' = \tfrac{1}{2} \cdot \left[\frac{R(1 - \frac{2}{3}p_o^2)}{Z_1} + Z_1(A + \eta C)\right]$$

og følgelig

$$\alpha_1' = \frac{1}{2\sqrt{1 - p_o^2}} \cdot \left[\frac{R(1 - \frac{2}{3}p_o^2)}{Z_1} + Z_1(A + \eta C)\right]; \ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}}. \quad (164).$$

her er

$$p_o = \frac{s}{2} \cdot \sqrt[4]{\left[(R + \frac{R_o}{s})^2 + \omega^2 (L - \frac{s^2}{12} R^2 C + \frac{L_o}{s})^2\right] \cdot \left[(A - \frac{s}{6}\omega^2 C^2 R) + \omega^2 C^2\right]};$$

eller med Tilnærmelse

$$p_o = \frac{s}{2}\omega \cdot \sqrt{\frac{L_o C}{s}} = \frac{\omega}{2 n_o}, \quad \ldots\ldots\ldots \text{ Tal. (165).}$$

og, ligeledes med Tilnærmelse

$$Z_1 = \sqrt{\frac{L_o}{sC}} \quad \ldots\ldots\ldots \text{Impedans. (165').}$$

Formlen (164) gælder kun for Værdier af p_o, der er kendelig mindre end 1; i Nærheden af denne Værdi, $p_o = 1$, varierer α_1' meget stærkt for smaa Forandringer i p_o, altsaa for konstant Spoleafstand for smaa Forandringer i Frekvensen, og for konstant Frekvens for smaa Variationer i s. For de primære Konstanter maa naturligvis indføres de effektive Værdier ved den paagældende Frekvens.

Forholdene i Nærheden af dette Punkt og for endnu større Værdier af p_o er ret vanskelige at overse, og da de ikke har nogen større Interesse for Praksis, skal vi ikke her komme nærmere ind paa Spørgsmaalet [I. 25 a]. I Fig. 34 er vist, hvorledes α_1' varierer med ω i et bestemt Tilfælde. (Konstanterne er: $R = \frac{44}{d^2}\ \frac{\text{Ohm}}{\text{km}}$; $L = o$; $C = 0{,}04 \cdot 10^{-6}\ \frac{\text{F}}{\text{km}}$; $A = 3{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{\omega}{5000}\ \frac{\text{Siemens}}{\text{km}}$; $L_o = 0{,}19$ H; $R_o = 20$ Ohm; $s =$ 2 km. De fuldt optrukne Kurver gælder for $d = 1$, de punkterede for $d = 0{,}8$ mm, Kurverne B og A for de upupiniserede Kabler. Da R, R_o, C og L_o ogsaa varierer med Frekvensen, giver Fig. 34 kun et omtrentligt Billede af de virkelige Forhold.)

§ 17. *Den mindste tilladelige Værdi af n_o. Pupin-Spolers Konstruktion og Anbringelsesmaade.*

Af Formlen (149) fremgaar, at Antallet af Spoler er proportionalt med n_o. og det samme gælder tilnærmelsesvis Udgifterne til Pupiniseringen. I de tilnærmede Betragtninger i § 15 spillede Værdien af n_o ingen Rolle for den pupiniserede

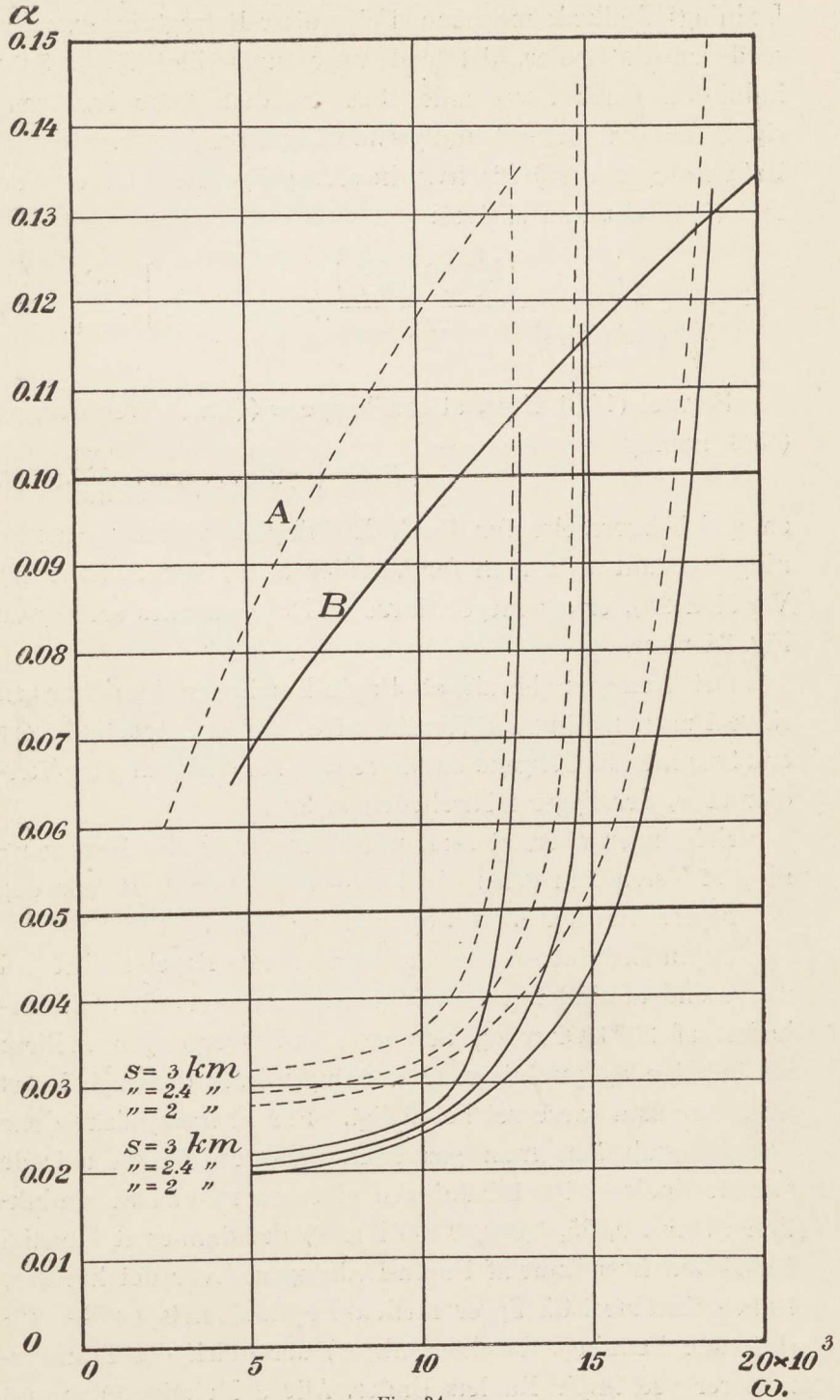

α
0.15
0.14
0.13
0.12
0.11
0.10
0.09
0.08
0.07
0.06
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
A
B
s = 3 km
" = 2.4 "
" = 2 "
s = 3 km
" = 2.4 "
" = 2 "
0
5
10
15
20×10³
ω.

Fig. 34.

Lednings Godhed; man kan, ifølge disse Betragtninger, nøjes med saa faa Spoler, det skal være, naar blot disses Selvinduktion gøres tilsvarende stor. At dette ikke kan være rigtigt er umiddelbart indlysende, og Grunden fremgaar af Betragtningerne i § 16, hvis hovedsagelige Resultat er Formel (164), der kan skrives:

$$\alpha_1' = \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{\omega}{2n_o}\right)^2}} \cdot \left[\frac{R\left[1-\frac{3}{8}\left(\frac{\omega}{2n_o}\right)^2\right]}{Z_1} + Z_1(A+\eta C)\right] \ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}} \cdot (164').$$

Formel (164') viser, at saa længe $\omega \ll 2n_o$, giver Formel (150), nemlig

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\left[\frac{R}{Z_1} + Z_1(A+\eta C)\right], \ldots\ldots\ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}} \cdot (150).$$

en god Tilnærmelse for Pupin-Ledningens virkelige Dæmpningskonstant α_1'; men for Værdier af ω, der nærmer sig Værdien $2n_o$, er α_1' meget større end α_1, saaledes som ogsaa Fig. 34 viser.

Det fremgaar heraf, at Pupin-Ledninger kun har en ringe Forvrængning for Værdier af ω, der er betydelig lavere end $2n_o$; men til Gengæld en uhyre stor Forvrængning for Værdier af ω, der ligger i Nærheden af $2n_o$.

Erfaringen viser, at man uden generende stor Forvrængning af Talen kan gaa ned til $n_o = 7000$; hyppig bruges dog lidt højere Værdier f. Eks. op til $n_o = 10\,000$.

Pupin-Ledningens Karakteristik er som Regel en hel Del større end almindelige Ledningers og kommer ofte op i Nærheden af 2000 Ohm og derover. Ved Overgangen mellem almindelige og pupiniserede Ledninger lides der saaledes et Tab, der kan være ret betydeligt. For at formindske dette Overgangstab kan man gaa frem paa flere Maader: [1]) de yderste Spoler i Pupinledningen gives en mindre Selvinduktion (f. Eks. 0,035, 0,060, 0,100 H); [2]) der dannes et kunstigt Kabel ved hver Ende af Pupin-Ledningen, hvor det kunstige Kabels Karakteristik ligger mellem Pupin-Kablets og den tilsluttende Lednings Karakteristik; [3]) der indskydes Transformatorer ved Pupin-Kablets Ender. Alle 3 Metoder har været

forsøgt, men om dem alle gælder, at hvad der vindes paa een Maade tabes i hvert Fald delvis igen paa en anden. Der er næppe nogen Udsigt til, at disse Metoder vil finde udstrakt Anvendelse; dog kan ved Overgangen mellem Ledninger med vidt forskellig Karakteristik Transformering med Fordel anvendes. Det bedste er, ved Konstruktionen af Pupin-Kablerne saa vidt muligt at tage Hensyn til, at disses Karakteristik kommer til at ligge saa nær som muligt ved Karakteristikken for de Ledninger, de skal knyttes sammen med.

Pupin-Spolernes Konstruktion og Anbringelsesmaade. Pupin-Spoler konstrueres nu altid som Tvillingspoler (Fig. 35), d. v. s. hver Spole forsynes med 2 Viklinger, der indskydes i lige overfor hinanden liggende (symmetriske) Punkter af Dobbelt-

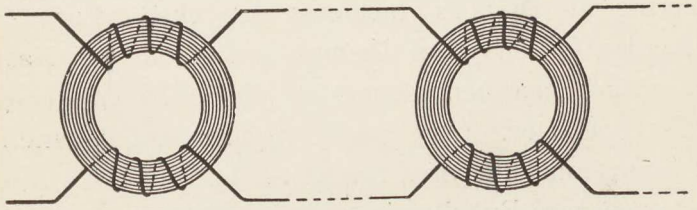


Fig. 35.

ledningen paa en saadan Maade, at den resulterende Selvinduktion bliver saa stor som muligt. En Tvillingspole er for samme Værdi af η billigere end to Enkeltspoler. Man har tidligere anvendt Spoler uden Jernkærne; nu vil man altid anvende Spoler med lukket Jernkærne. Fordelene ved de sidste er bl. a., at Forholdet $\frac{R_o}{L_o}$ er mindre; endvidere er der her intet ydre Felt, der kan inducere i andre Spoler (Krydstale) eller inducere Hvirvelstrømme i nærliggende Metalmasser. Spoler med lukkede Jernkærner kan derfor uden Skade anbringes tæt sammen og indesluttede i tætte Jernkasser.

Spoler med Jernkærne maa nødvendigvis være Tvillingspoler; i modsat Fald risikerer man, at en tilfældig, forholdsvis stærk Jævnstrøm i den ene af Dobbeltledningens 2 Traade polariserer Kærnerne og derved forandrer Spolernes

Selvinduktion. Ledningens Symmetri og dermed dens Induktionsfrihed gaar i saa Fald tabt*).

Hidtil har Pupiniseringen af Kabler spillet den største Rolle; men Pupinisering af lange, overjordiske Ledninger begynder nu at faa Betydning.

Dannes af to pupiniserede Dobbeltledninger, *A* og *B*, en Dupleksledning *C*, saa vil Pupin-Spolerne i *A* og *B* ikke give nogen kendelig Forhøjelse af Dupleksledningens Selvinduktion, men kun forøge dennes Modstand. Det bliver derfor som Regel ogsaa nødvendigt at pupinisere Dupleksledningen; dette maa ske ved Indskydelsen af særlige Spoler i denne, viklede saaledes, at de giver Dupleksledningen stor Selvinduktion. De sidstnævnte Spoler vil ikke forøge Ledningerne *A* og *B*'s Selvinduktion, men kun disses Modstand. For alle tre Strømløb gælder det altsaa, at Muligheden for Etablering af Dupleks medfører en ekstra Forøgelse af Modstanden og derved af Dæmpningskonstanten. Naar Anlægget ordnes paa hensigtsmæssig Maade bliver Forøgelsen dog ikke ret stor. (Angaaende en nærmere Behandling af dette Spørgsmaal henvises iøvrigt til [I. 22]).

De nærmere Enkeltheder vedrørende Pupin-Spolers Konstruktion hemmeligholdes; det vides dog, at Jernkærnen bestaar af tynde Jerntraade eller Jernplader, som Regel det sidste. Der anvendes sikkert legeret Jern med stor Modstandsfylde for at gøre Hvirvelstrømstabet saa lille som muligt; men disse Forhold vil blive omtalt noget nærmere i § 19.

Et Par Exempler paa Konstanter for Pupin-Spoler er givet i nedenstaaende Sammenstilling:

---

*) Elimination af »Krydstale« frembyder ved Pupin-Kabler, og i det hele taget ved Kabler med forøget Selvinduktion, ogsaa af andre Grunde betydelig større Vanskeligheder end ved almindelige Kabler. Dels er Pupin-Kablerne hyppig længere end almindelige Kabler, dels giver de paa Grund af deres højere Karakteristik for samme Energioverføring højere Spændinger. Da Krydstale hovedsagelig skyldes elektrostatisk Induktion, bevirker begge disse Forhold en forøget Tendens til Krydstale. (Se iøvrigt S. A. Pollock: Balancing of telephone cables which require to be loaded for superimposed working. Post Office Electr. Eng. Journ. Vol. 7, p. 41, 1914).

Pupin-Spolen bestemt for
1,2 mm papir-luftisoleret Blyrørskabel:
$s = 2$ km; $L_o = 0{,}2$ Henry; $R_o = 4{,}2$ Ohm; $R_{\omega=5000} = 10{,}0$ Ohm.
0,9 mm papir-luftisoleret Blyrørskabel:
$s = 2$ km; $L_o = 0{,}2$ Henry; $R_o = 8{,}5$ Ohm; $R_{\omega=5000} = 15{,}0$ Ohm.

§ 18. *Krarup-Kabler.*

Den mest nærliggende Løsning af Problemet: Kontinuerlig Forøgelse af en Lednings Selvinduktion, er tilsyneladende den at erstatte Lederens Kobbertraade med Jerntraade, og vi skal derfor ganske kort undersøge denne Mulighed.

En almindelig Dobbeltledning har, som før omtalt (§ 5), følgende Selvinduktion

$$L = 4 \cdot \left\{ lgn \frac{2D}{d} + \frac{1}{4} \right\} \cdot 10^{-4}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{H}{km}.$$

hvor D er Traadenes Afstand og d deres Diameter. Anvendes Jerntraade med reversibel Permeabilitet μ, bliver

$$L = 4 \cdot \left\{ lgn \frac{2D}{d} + \frac{\mu}{4} \right\} \cdot 10^{-4}, \ldots\ldots\ldots \frac{H}{km}. \quad (170).$$

Sættes f. Eks. $D = 400$ mm og $d = 4$ mm, hvilke Forhold omtrent svarer til Luftledninger, saa er $lgn \frac{2D}{d} = 5{,}3$, medens $\frac{2D}{d} = 2{,}7$, der omtrent svarer til Kabler, giver $lgn \frac{2D}{d} = 1$. Antages $\mu = 100$, er $\frac{\mu}{4} = 25$, man faar altsaa i alle Tilfælde en meget betydelig Forøgelse af Ledningens Selvinduktion, for Kabler omtrent 25 Gange. Skønt Jernledningen samtidig er billigere end en Kobberledning, kan man dog ikke deraf slutte, at en Jernledning er en brugbar Løsning af Spørgsmaalet, thi den foregaaende Betragtning er ufuldstændig. Jerntraadens Modstand er nemlig ca. 8 Gange saa stor som Kobbertraadens, og Forholdet $\frac{R}{\sqrt{L}}$ forøges altsaa for Jerntraadens Vedkommende mindst $\frac{8}{\sqrt{25}} = 1{,}6$ Gange i Forhold til Kobber. Endelig vil Vekselstrømmene ikke fordele sig ligelig over Traadens Tværsnit, men Strømtætheden vil blive

størst udvendig, saaledes at R forøges og L formindskes. (For $d = 4$ mm, $\mu = 100$ og $\omega = 5000$ vil R omtrent forøges 86 % og L formindskes ca. 40 % [IV]). Jerntraad kan derfor ikke bruges til det foreliggende Øjemed, og vi vil i det følgende gaa ud fra, at Lederen er af Kobber.

En praktisk Løsning af det foreliggende Spørgsmaal lykkedes først for Danskeren Krarup [I. 20], idet han ved at omvikle Kobberlederen med et eller flere, saavidt muligt tætte Lag af tynde Jerntraade opnaaede det ønskede Resultat. Førend vi imidlertid gaar over til den egentlige Behandling af Krarup-Kablerne, vil vi udlede nogle simple Hjælpeformler [I. 21a].

En Jerntraad af Tykkelse d_o er viklet op i Form af en Skruelinie med indre Diameter d og Skruegangshøjde $d_o \cdot (1 + \varepsilon)$ (se Fig. 36). Den magnetiske Modstand, som en enkelt Skruevikling frembyder, sammensætter sig af de to Dele: Modstanden i Jernet og Modstanden ved Overgangen fra en Skruevikling til den næste. Den første af disse Modstande er med tilstrækkelig Tilnærmelse $\frac{4D_o}{\mu d_o^2}$ (idet $D_o = d + d_o$ er stor i Forhold til d_o); den sidste kan kun angives med Tilnærmelse. Vi sætter Modstanden ved Overgangen fra en Vinding til en anden til $\frac{\varepsilon d_o}{\left(\frac{d_o}{\pi}\right)} = \pi\varepsilon$ pr. cm af Traadens Længde, svarende til Modstanden mellem de i Fig. 37 viste plane Flader ab og cd; den samlede Modstand ved Overgangen fra en Vikling til en anden bliver da $\frac{\pi\varepsilon}{\pi D_o} = \frac{\varepsilon}{D_o}$. Den samlede Modstand bliver følgelig

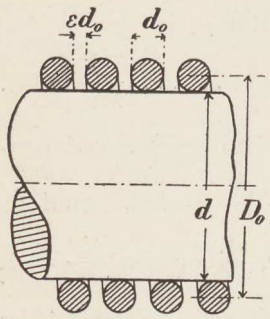


Fig. 36.

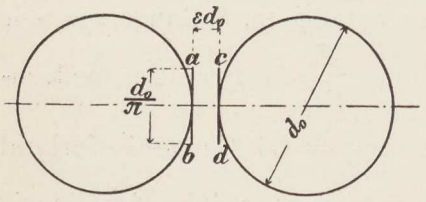


Fig. 37.

$$\frac{4D_o}{\mu d_o^2}+\frac{\varepsilon}{D_o}=\frac{4D_o}{\dfrac{\mu}{1+\mu\dfrac{\varepsilon}{4}\cdot\dfrac{d_o^2}{D_o^2}}\cdot d_o^2}=\frac{4D_o}{\mu_1\cdot d_o^2},$$

hvor

$$\mu_1=\frac{\mu}{1+\mu\cdot\dfrac{\varepsilon}{4}\cdot\dfrac{d_o^2}{D_o^2}}=\frac{\mu}{1+\delta},$$

idet man sætter

$$\delta=\mu\cdot\frac{\varepsilon}{4}\cdot\frac{d_o^2}{D_o^2}.$$

Den resulterende, magnetiske Modstand er altsaa den samme, som man vilde faa, hvis den skruedannede Traad erstattedes med lukkede Ringe med Permeabiliteten $\mu_1=\frac{\mu}{1+\delta}$; μ_1 vil i Almindelighed kun være nogle faa Procent mindre end μ. I det følgende tænker vi os Skrueviklingen reduceret til lukkede Jernringe paa den angivne Maade. En Jerntraadsbevikling som den i Fig. 36 viste vil derfor forøge en Dobbeltledning Selvinduktion med

$$L_o=2\pi\cdot\frac{\mu}{1+\delta}\cdot\frac{d_o}{D_o(1+\varepsilon)}\cdot 10^{-4}\ldots\ldots\ \frac{\text{Henry}}{\text{km}}. \quad (171).$$

Ved Hjælp af denne Formel kan man beregne den fra et enkelt Jernlag hidrørende Forøgelse af Selvinduktionen. Er der flere Lag, er den samlede Forøgelse naturligvis lig med Summen af de fra de enkelte Lag hidrørende Forøgelser.

Ligesom ved Pupin-Ledningerne vil ogsaa her Forøgelsen af Selvinduktionen være ledsaget af en Forøgelse af den effektive Modstand; regnet i Ohm pr. km Dobbeltledning kaldes denne Forøgelse R_o. Den skyldes i Hovedsagen Hvirvelstrømme i Jerntraadene og Tab ved Hysterese; den sidste Del vil dog kun spille en underordnet Rolle ved de Feltintensiteter, der her er Tale om, og vi vil derfor i det følgende kun tage Hensyn til Hvirvelstrømstabet. I Praksis anvendes kun tynde Jerntraade, 0,20 à 0,35 mm i Diameter, og man kan da med tilstrækkelig Tilnærmelse paaregne, at den magnetiske Induktion er ensartet over hele

Traadens Tværsnit. Hvirvelstrømstabet kan da let beregnes paa den nedenfor angivne Maade. (Eksakte Formler for Hvirvelstrømstab i runde Traade og Plader findes i Tillæg IV.)

I et magnetisk Vekselfelt $H \cdot \cos \omega t$ er anbragt en lang, retlinet Jerntraad parallel med Feltets Retning; gaar man ud fra, at Feltet i Traaden overalt er lig med det ydre Felt, saa er det let at bestemme Intensiteten af de Hvirvelstrømme, der opstaar. For det i Fig. 38 antydede cirkelringformede Lederelement er Modstanden $\frac{2\pi x \cdot \varrho}{dx}$, hvor ϱ er Jernets Modstandsfylde. Lederelementet omslutter Kraftlinietallet Φ_x bestemt ved:

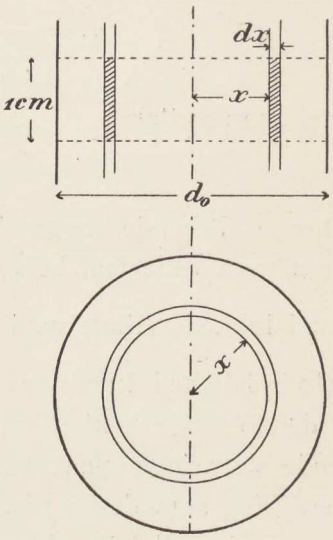


Fig. 38.

$$\Phi_x = \mu \pi x^2 \cdot H \cos \omega t.$$

Variationen i Φ_x giver en E.M.K. e i Lederelementet, der bestemmes ved

$$e = -10^{-8} \cdot \frac{d\Phi_x}{dt} = \omega \cdot 10^{-8} \mu \cdot \pi x^2 \cdot H \sin \omega t.$$

Den tilsvarende Strøm i Lederelementet er

$$i = \frac{\omega \mu x \cdot dx \cdot 10^{-8}}{2\varrho} \cdot H \sin \omega t;$$

den i Lederelementet tabte Effekt er følgelig

$$\frac{\omega^2 \mu^2 \pi x^3}{4\varrho} \cdot H^2 10^{-16} \cdot dx,$$

saaledes at det samlede Effekttab pr. cm Længde af Jerntraaden bliver

$$\frac{\pi \mu^2 \omega^2 H^2 d_o^4}{256 \cdot \varrho} \cdot 10^{-16}.$$

For den til en Cirkelring bøjede Jerntraad vil Forholdene tilnærmelsesvis være de samme; Cirkelringens Længde

er πD_o, i Stedet for μ sættes ifølge det foregaaende $\frac{\mu}{1+\delta}$, og H erstattes med $\sqrt{2}\cdot\frac{4}{10D_o}\cdot I$, hvor I betegner den effektive Strøm i Ledningen. Pr. Vinding bliver da Effekttabet

$$10^{-18}\cdot\frac{\pi^2\omega^2\mu^2 d_o^4}{8\cdot\varrho(1+\delta)^2\cdot D_o}\cdot I^2,$$

og pr. km Dobbeltledning

$$10^{-13}\cdot\frac{\pi^2\omega^2\mu^2 d_o^3}{4\cdot\varrho(1+\delta)^2(1+\varepsilon)\cdot D_o}\cdot I^2.$$

Her er Faktoren til I^2 den af Hvirvelstrømmene bevirkede Modstandsforøgelse pr. km Dobbeltledning, idet d_o og D_o er regnede i cm, ϱ i Ohm pr. cm³. Regnes d_o og D_o i mm og ϱ i Ohm $\frac{\text{m}}{\text{mm}^2}$ faas

$$R_o = 10^{-11}\cdot\frac{\pi^2\omega^2\mu^2 d_o^3}{4\cdot\varrho\cdot(1+\delta)^2(1+\varepsilon)\cdot D_o} \ldots\ldots\ldots \frac{\text{Ohm}}{\text{km}}. \quad (172).$$

Af stor Betydning er Forholdet

$$\eta = \frac{R_o}{L_o} = 10^{-7}\cdot\frac{\pi\omega^2\mu d_o^2}{8\cdot\varrho(1+\delta)}, \ldots\ldots\ldots \frac{\text{Ohm}}{\text{Henry}}. \quad (173).$$

eller med Tilnærmelse:

$$\eta = \frac{\pi\omega^2\mu d_o^2}{8\cdot 10^7\varrho} = \frac{\mu\omega^2}{2\cdot 10^7}\,\frac{1}{R_k}, \ldots\ldots\ldots \frac{\text{Ohm}}{\text{Henry}}. \quad (173').$$

hvor R_k er Modstanden i Ohm af 1 meter af Jerntraaden [IV. c.].

η er altsaa proportional med Frekvensens Kvadrat, med første Potens af Permeabiliteten og med Kvadratet paa Jerntraadens Diameter, samt omvendt proportional med Jernets Modstandsfylde; derimod er η uafhængig af D_o, saaledes at η for en given Traad og en given Frekvens er konstant. Disse Forhold omtales iøvrigt noget nærmere i § 19.

Naar Værdien af η kendes, er Beregningen af α_1, for saa vidt man anvender Tilnærmelsesformlen (53), ganske analog med den ved Pupin-Ledninger benyttede, idet man har

$$\alpha_1 = \frac{R+R_o}{2}\sqrt{\frac{C}{L+L_o}} + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L+L_o}{C}}; \ldots\ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}}. \quad (a).$$

samtidig er med Tilnærmelse

$$Z_1 = \sqrt{\frac{L + L_o}{C}}.$$

Indføres denne Værdi for Z_1 i (a) faas:

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}\left[(R - \eta L)\frac{1}{Z_1} + (A + \eta C)Z_1\right] \ldots\ldots\ldots \text{(b)}.$$

Ligningerne (a) og (b) er ganske de samme som de tilsvarende (142) for Pupin-Ledninger.

Et Krarup-Kabels Pris afhænger selvfølgelig baade af Metalkoren og Isolationslaget; for en given Kapacitet bliver imidlertid Valget af den ydre Diameter D_1 af Metalkoren (Kobber + Jern) i Hovedsagen afgørende for Kablets Pris; naar denne Diameter er bestemt, er nemlig ogsaa, for en given Kapacitet, Tykkelsen af Isolationslaget bestemt og heraf afhænger atter tillige Udgifterne vedrørende Kablets Armatur. Spørgsmaalet bliver da, hvorledes, for en given Værdi af D_1, Tykkelsen af Jerntraaden og Antallet af Viklingslag skal vælges for at opnaa den mindst mulige Værdi af α. Dette kan undersøges paa følgende Maade.

Indføres for en enkelt Jerntraadsbevikling Betegnelserne fra Fig. 35, har man med Tilnærmelse

$$Z_1 = \sqrt{\frac{L + L_o}{C}} = \sqrt{\frac{L + 10^{-4} \cdot \frac{2\pi\mu}{1+\varepsilon} \cdot \frac{d_o}{D_1 - d_o}}{C}}, \ldots \text{Impedans.(174).}$$

samt

$$\alpha_1 = \frac{1}{2Z_1}\left\{R_1 + \frac{A}{C} \cdot L + \frac{d_o}{D_1 - d_o} \cdot \left[10^{-4} \cdot \frac{2\pi\mu}{1+\varepsilon} \cdot \frac{A}{C} + 10^{-11} \cdot \frac{\pi^2\omega^2\mu^2 d_o^2}{4\varrho(1+\varepsilon)}\right]\right\} \ldots\ldots \frac{\text{Tal}}{\text{km}}. \text{ (175).}$$

Anvendes 2 Viklingslag af Jerntraad med samme Diameter d_o faas

$$Z_1 = \sqrt{\frac{L + 10^{-4} \cdot \frac{2\pi\mu}{1+\varepsilon}\left(\frac{d_o}{D_1 - d_o} + \frac{d_o}{D_1 - 3d_o}\right)}{C}},$$

og

$$\alpha_1 = \frac{1}{2Z_1}\left\{R_2 + \frac{A}{C} \cdot L + \left(\frac{d_o}{D_1 - d_o} + \frac{d_o}{D_1 - 3d_o}\right) \cdot \left[10^{-4} \cdot \frac{2\pi\mu}{1+\varepsilon} \cdot \frac{A}{C} + 10^{-11} \cdot \frac{\pi^2\omega^2\mu^2 d_o^2}{4\varrho \cdot (1+\varepsilon)}\right]\right\}.$$

Endelig har man for 3 Viklingslag af lige tyk Jerntraad

$$Z_1 = \sqrt{\frac{L + 10^{-4}\frac{2\pi\mu}{1+\varepsilon}\left(\frac{d_o}{D_1 - d_o} + \frac{d_o}{D_1 - 3d_o} + \frac{d_o}{D_1 - 5d_o}\right)}{C}}$$

og

$$\alpha_1 = \frac{1}{2Z_1}\left\{R_3 + \frac{A}{C}\cdot L + \left(\frac{d_o}{D_1 - d_o} + \frac{d_o}{D_1 - 3d_o} + \frac{d_o}{D_1 - 5d_o}\right)\cdot\left[10^{-4}\cdot\frac{2\pi\mu}{1+\varepsilon}\cdot\frac{A}{C} + 10^{-11}\cdot\frac{\pi^2\omega^2\mu^2 d_o^2}{4\cdot\varrho\cdot(1+\varepsilon)}\right]\right\}.$$

Beregningen gaar da for sig paa den Maade, at man for forud antagne Værdier af L, C, A, ϱ, μ, og ε samt af Metalkorens ydre Diameter D_1 bestemmer Værdien af α_1 for forskellige Jerntraadstykkelser d_o og derved ad grafisk Vej finder, hvilken Værdi af d_o, der giver det mindste α_1. Af de i Formlerne indgaaende Led er flere uafhængige af d_o, hvorved Beregningen i høj Grad lettes. Disse Beregninger maa saa eventuelt gennemføres for baade 1, 2 og 3 Viklingslag, for flere Værdier af D_1 samt for nogle Værdier af C. Kapaciteten bestemmes efter de i § 5 givne Formler, idet Lederens Diameter regnes lig med D_1. R_1, R_2 og R_3 er Modstandene svarende til Traaddiametrene $D_1 - 2d_o$, $D_1 - 4d_o$ og $D_1 - 6d_o$.

Forholdet mellem D_1 og Isolationslagets ydre Diameter D', der bl. a. er bestemmende for Kapaciteten, maa fastsættes erfaringsmæssigt. Da Prisen for Guttaperkakabler i det væsentlige kun afhænger af Guttaperkalagets ydre Diameter D' og kun i ringe Grad af, hvorledes Tværsnitsarealet $\frac{\pi}{4}D'^2$ fordeles mellem Kobber og Guttaperka, synes det ved første Øjekast naturligst ved disse Kabler at vælge Forholdet $\frac{D'}{D_1}$ saaledes, at α bliver saa lille som muligt. Kan man med tilstrækkelig Tilnærmelse benytte Formlen $\alpha = \sqrt{\frac{\omega CR}{2}}$, saa er α Minimum, naar Produktet CR er Minimum, og dette indtræffer, naar Funktionen $D_1^2\, lgn\frac{D'}{D_1}$ er Maksimum. Man finder let, at dette er Tilfældet for $lgn\frac{D'}{D_1} = 0{,}5$, eller for $\frac{D'}{D_1} = 1{,}65$. Dette giver dog en forholdsvis alt for svær Kobberleder; af Hensyn til Isolationslagets Styrke m. m., maa Guttaperkalaget have en

betydelig større Tykkelse. (Se iøvrigt Tillæg X, der giver nogle Dimensioner for forskellige Krarup-Kabler).

Kurverne Fig. 39 viser Resultatet af nogle Beregninger for et Kabel med Konstanterne: $C = 0{,}12 \cdot 10^{-6} \frac{\text{F}}{\text{km}}$, $L = 0{,}001 \frac{\text{H}}{\text{km}}$, $A = 1{,}44 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Siemens}}{\text{km}}$, $\varepsilon = 0{,}1$ og $\mu = 125$; endvidere er benyttet $\omega = 5000$ og $D_1 = 4{,}4$ mm. Kurverne viser

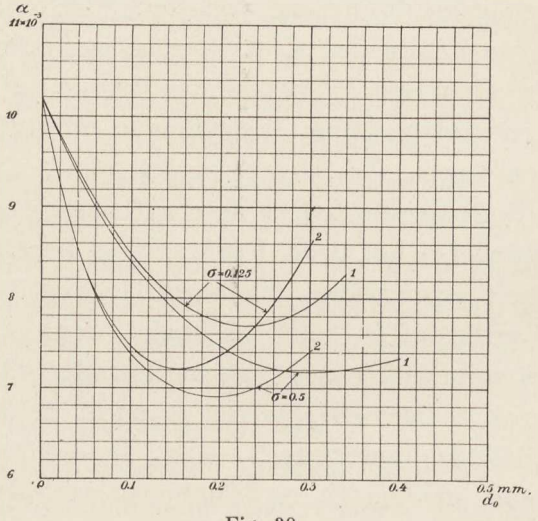


Fig. 39.

Variationen af α_1 med d_0 baade for 1 og 2 Viklingslag, dels for $\varrho = 0{,}125$ og dels for $\varrho = 0{,}5$.

§ 19. *Sammenligning mellem Pupin- og Krarup-Kabler.*

Det fremgaar af Ligningerne (142) samt (a) og (b) Side 81 og 82, at Pupin- og Krarup-Kabler faar samme Dæmpningskonstant, naar Konstanterne R, L, A, C, L_1 og η har samme Værdier i de to Tilfælde.

Vi vil foreløbig gaa ud fra, at R, L, A, C og L_1 har samme Værdier for begge Kabler og kun betragte Konstanten η. Denne er i begge Tilfælde Forholdet mellem Forøgelsen af den effektive Modstand og Forøgelsen af Selvinduktionen. For Pupin-Ledninger kan man sætte

$$\eta = \eta_0 + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 \ldots\ldots\ldots \frac{\text{Ohm}}{\text{Henry}} \text{(a)}.$$

Her skyldes η_o Spolernes Jævnstrømsmodstand, η_1 Hvirvelstrømstabet i Jernkærnen, η_2 Hvirvelstrømstab frembragt af Spolernes ydre Felt, η_3 Hysteresetabet og η_4 Hvirvelstrømme i selve Spoleviklingerne. Af disse er η_2 og η_4 for godt konstruerede Spoler sikkert ret smaa. η_3 afhænger af Feltintensiteten (altsaa ogsaa af Strømstyrken) og af Jernmængden per Spole; jo større disse er, desto større er η_3; Værdien af η opgives ofte for en Strømstyrke af 1 Milliampere.

De Jerntraade og Jernplader, man anvender i Praksis, er saa tynde, at man ved Beregningen af Hvirvelstrømstabet i disse med tilstrækkelig Tilnærmelse kan gaa ud fra, at den magnetiske Induktion har samme Værdi over hele Tværsnittet. I saa Fald er η_1 for circulære Traade bestemt ved (se § 18 og [IV. c]):

$$\eta_1 = \frac{\mu\omega^2}{2\cdot 10^7}\cdot\frac{\pi d_o^2}{4\varrho} = \frac{\mu\omega^2}{2\cdot 10^7}\cdot\frac{1}{R_k}, \ldots\ldots\ldots \frac{\text{Ohm}}{\text{Henry}}. \quad \text{(b).}$$

hvor d_o er Jerntraaadens Diameter i mm og R_k Modstand af 1 m Jerntraad.

For Plader er

$$\eta_1 = \frac{\pi\mu\omega^2}{3\cdot 10^7}\cdot\frac{d_o^2}{\varrho} = \frac{\pi\mu\omega^2}{3\cdot 10^7}\cdot\frac{1}{R_k'}, \ldots\ldots\ldots \frac{\text{Ohm}}{\text{Henry}}. \quad \text{(c).}$$

hvor d_o er Jernpladens Tykkelse, og R_k' Modstanden af 1 m Jerntraad, naar dennes Tværsnitsareal er d_o^2 mm^2.

For samme Jernkvalitet og samme d_o er η_1 $\frac{8}{3}$ Gange saa stor for Plader som for Traad.

For at faa η_1 lille for en given Frekvens, maa ifølge (b) og (c) de benyttede Traade og Plader være tynde. Konstruktive Hensyn sætter her en Grænse; selv om Pladeformen i og for sig er mindre heldig, saa kan man til Gengæld benytte tyndere Plader end Traade, saaledes at man ofte staar sig ved at anvende Plader. Disse giver ogsaa en bedre Rumudfylding. Af stor Betydning er det endvidere, at Modstandsfylden ϱ er saa stor som mulig; medens Permeabiliteten af Hensyn til Hvirvelstrømstabet helst ikke maa være for stor. Paa den anden Side giver en stor Permeabilitet smaa og derfor billige og bekvemme Spoler. Man foretrækker derfor

Jern med ret stor Permeabilitet og meget stor Modstandsfylde. I saa Henseende frembyder forskellige Jernlegeringer store Fordele. Nedenstaaende Tabel A giver Modstandsfylden af nogle Jernlegeringer, medens Tabel B giver nogle Oplysninger om de magnetiske Forhold for 3 af disse Legeringer. (Tallene er tagne fra Barrett, Brown, and Hadfield: Researches on different alloys of iron. Journ. of the Inst. of Elec. Eng. Vol. 31, p. 674. 1902.)

TABEL A.

Nr.	*Jernlegeringens Sammensætning.*	ϱ
a	99.89 % Fe + 0.028 % C + 0.07 % Si (Svensk Trækulsjern)	0.102
b	98.98 » + 0.17 » + 0.10 » + 0.75 % Al.	0.220
c	97.33 » + 0.24 » + 0.18 » + 2.25 »	0.390
d	94.08 » + 0.22 » + 0.20 » + 5.50 »	0.700
e	97.30 » + 0.20 » + 2.50 »	0.421
f	94.24 » + 0.26 » + 5.50 »	0.652

Af Tabellerne fremgaar, hvor overordentlig meget gunstigere disse nyere Jernlegeringer stiller sig end det tidligere meget benyttede, svenske Trækulsjern.

I Tabel C er endelig givet en Oversigt over Værdierne af η_1 beregnet efter (b) og (c) for forskellige Tykkelser af Traad og Plade, for $\varrho = 0{,}125$ og $\varrho = 0{,}500$ samt for $\mu = 125$.

TABEL B.*)

Legering Nr.	*a*		*c*		*e*	
H	*B*	μ	*B*	μ	*B*	μ
2	7400	3700	12000	6000	10200	5100
4	11150	2790	13800	3450	12300	3075
6	12600	2100	14500	2416	13400	2233
10	14300	1430	15200	1520	14200	1420

*) Over Værdien af den reversible Permeabilitet foreligger ikke tilstrækkelig sikre Opgivelser; for de bedste Jernlegeringer ligger den vistnok omkring 250 til 300.

TABEL C. Værdier af η_1, for $\omega = 5000$ og $\mu = 125$.

d_0 mm =		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30
$\varrho = 0.125$	Traad	2.45	9.81	22.1	39.3	61.3	88.4
	Plade	6.54	26.2	58.9	104.7	162.9	235.6
$\varrho = 0.500$	Traad	0.61	2.45	5.50	9.83	15.3	22.1
	Plade	1.64	6.55	14.7	26.2	40.7	58.9

Spolernes Jævnstrømsmodstand ligger hyppigt imellem 0,3 og 0,6 Gange deres effektive Modstand ved $\omega = 5000$; η_0 ligger i saa Fald ogsaa mellem $0{,}3\eta$ og $0{,}6\eta$.

Skrives η for Krarup-Kabler ligeledes paa Formen (a), saa er i dette Tilfælde $\eta_0 = 0$, $\eta_2 = 0$ og $\eta_4 = 0$. Den til Hysteresetabet svarende Andel η_3 vil alt iøvrigt lige blive omtrent den samme som for Pupin-Kabler. Ved Krarup-Kabler er det magnetiske Felt mindre koncentreret, Feltintensiteten og Hysteresetabet pr. Volumenenhed af Jernet derfor mindre, men til Gengæld bruges der større Jernmængder end ved Pupin-Kabler. Hvirvelstrømsleddet η_1 bliver nøjagtig det samme i begge Tilfælde, for saa vidt der anvendes samme Jernmateriale i de samme Tykkelser.

Resultatet af denne Sammenligning er altsaa, at η for Krarup-Kabler er mindre end for Pupin-Kabler, for saa vidt der i begge Tilfælde er anvendt Jern af samme Kvalitet og Tykkelse. Naar de foreliggende Erfaringer som Regel har givet det modsatte Resultat [se f. Eks. I. 18 b], saa skyldes dette, at der er anvendt for tyk og for godt ledende Jerntraad til Krarup-Kablerne. Af konstruktive Grunde kan ganske vist anvendes tyndere Jerntraad (eller Plade) til Pupin-Spoler end til Krarup-Kabler; men benyttes til de sidste legeret Jern af god Kvalitet og Traadtykkelse 0,2 mm, er Hvirvelstrømstabet saa ringe, at η_1 for Krarup-Kabler som

Regel vil være mindre end η_0 for Pupin-Kabler, og i saa Fald er η sikkert mindst for Krarup-Kabler.

Den Forøgelse af den effektive Modstand, der ikke skyldes Selvinduktionsforøgelsen, men derimod Hvirvelstrømme i andre Ledere, Blykappe, Armatur o. lign. er den samme i begge Tilfælde. Ved Pupin-Kabler forøges C paa Grund af Spolernes Kapacitet med omkring 0,003 μF pr. Spole og ved Krarup-Kabler paa Grund af Jernbeviklingen. Den sidste Kapacitetsforøgelse er i Almindelighed den største.

Tilbage staar Værdien af L_1. Ved Pupin-Kabler kan denne uden Vanskelighed gives enhver ønskelig Værdi, og man vælger L_1 saaledes, at α omtrent bliver saa lille som muligt, dog under tilbørligt Hensyn til Spoleafstand og Refleksionstab. Ved Krarup-Kabler kan man derimod i Praksis kun give L_1 en Værdi paa indtil ca. 0,01 Henry pr. km, for $\eta = 125$.

Regnes med Tilnærmelsesformlerne (151) er den bedste Værdi af L_1 bestemt ved

$$L_1 = \frac{R}{\eta + \frac{A}{C}}.$$

For givne Værdier af η, A og C er den Modstand R', ved hvilken man lige netop kan opnaa den minimale Værdi af α ved Krarups Methode, bestemt ved

$$R' = \left(\eta + \frac{A}{C}\right) \cdot 0{,}01.$$

For $\eta = 50$ og $\frac{A}{C} = 20$, er $R' = 0{,}7$ Ohm pr. km. Man kan dog, uden at α bliver væsentlig større, benytte en betydelig mindre Værdi af L_1 end den teoretisk bedste, og bruges samtidig Jern, for hvilket $\mu = 250$, kommer R' op i Nærheden af 2 Ohm pr. km, svarende til en omtrent 5 mm tyk Kobberleder. Ved lange Kabler vil man derfor i elektrisk Henseende som Regel staa sig ved at bruge Pupins Metode. Ved korte Kabler, hvor Refleksionstabene spiller en forholdsvis stor Rolle, kan Forholdene stille sig noget anderledes.

I mekanisk Henseende har derimod Krarup-Kablerne

store Fordele fremfor Pupin-Kabler, navnlig for undersøiske Kabler er de førstnævntes Homogenitet af den største Betydning. Udlægning og Reparation af Pupin-Kabler paa store Vanddybder frembyder meget store Vanskeligheder. Bortset fra disse Vanskeligheder stiller Pupin-Kabler sig i det hele taget uheldigere overfor Reparationer, idet Spoleafstanden ved disse let forandres, hvad der indvirker uheldigt paa Kablets elektriske Egenskaber. En nøjere Udredning af disse Forhold falder dog uden for denne Bogs Rammer.. (Se iøvrigt særlig I. 15 a, 18 b, 23, 24 samt E. F. Petritsch: Pupin- oder Krarup-Kabel? [Elektr. u. Maschienenbau, p. 409, 440. 1912]; Krarup-Kabler stiller sig dog, ifølge det foregaaende, noget gunstigere end paaregnet i nogle af de nævnte Arbejder).

D. Enkeltleder.

§ 20. *Almindelige Bemærkninger.*

I det foregaaende er nærmest tænkt paa Anvendelsen af Dobbeltledninger. I Telefonien spiller Enkeltledninger en Rolle paa to vidt forskellige Omraader, nemlig dels for korte lidet betydningsfulde Telefonledninger, dels for lange, undersøiske Kabler paa dybt Vand. I sidstnævnte Tilfælde frembyder Udlægningen af Kabler med flere Ledere meget store Vanskeligheder, lige som saadanne Kabler paa Grund af deres store Længde bliver meget dyre, da Lederne samtidig maa være meget svære. Induktion fra andre Ledninger spiller i dette Tilfælde ingen Rolle, og Jordstrømme — hidrørende fra Stærkstrømsanlæg eller andre Aarsager — kan man erfaringsmæssig eliminere ved at føre Kablets Jordforbindelse nogle faa Kilometer ud i Havet. Overgangen til de tilsluttende Dobbeltledninger sker naturligvis gennem Transformatorer [I. 15 a].

Vi skal ganske kort betragte Forholdene ved Enkeltleder. Dennes primære Konstanter betegnes R', L', A' og C', de sekundære ved $\gamma' = \alpha' + j\beta'$ og Z', medens de tilsvarende Konstanter for en Dobbeltledning, der er dannet af to saadanne

Enkeltledninger, paa sædvanlig Maade betegnes ved de samme Bogstaver uden Mærke. For Jævnstrøm er $R' = \frac{1}{2}R$, men for Vekselstrøm stiller Forholdet sig helt anderledes, idet R' her som Regel er meget større end $\frac{1}{2}R$. For Luftledninger kan R' antage Værdier helt op til $2R$, for Kabler som Regel ikke over 0,6 à 0,7 R. Denne Forøgelse af R' skyldes Hvirvelstrømme i nærliggende Ledninger, Metalmasser, Jord o. s. v. Ved Dobbeltleder bliver disse Tab meget mindre, da det magnetiske Felt her er meget mere lukket. For almindelige Ledninger er $L' > \frac{1}{2}L$; for Ledninger med forøget Selvinduktion er tilnærmelsesvis $L' = \frac{1}{2}L$. Endvidere er $C' \leqq 2C$ og $A' =$ ca. $2A$. Heraf følger, at α' som Regel er noget større end α, medens $|Z'|$ ligger i Nærheden af $\frac{1}{2}|Z|$.

E. Telefoni ved Hjælp af højfrekvente Vekselstrømme.

§ 21. *Almindelige Bemærkninger.*

Det har flere Gange været foreslaaet at benytte højfrekvente Vekselstrømme til Taleoverføring gennem lange Kabler, under Anvendelse af de fra den traadløse Telefoni kendte Sende- og Modtageapparater. Tankegangen er omtrent følgende: Ved Kabler med stor Kapacitet og for Frekvenser omkring 1000 er α bestemt ved Ligning (60), nemlig

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\omega RC}{2}} \quad \text{(a)}.$$

Der er saaledes stærk Forvrængning og, paa Grund af den store Værdi af C, tillige stærk Dæmpning.

Anvender man derimod en højfrekvent Vekselstrøm som »Bærer« for Talestrømmen, saa bestemmes α_2 for den højfrekvente Strøm ved

$$\alpha_2 = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{(b)}.$$

Der er i dette Tilfælde ingen Forvrængning og (b) giver eventuelt en betydelig mindre Værdi for α end (a).

Hele den anførte Tankegang beror dog paa en Række Fejlslutninger; af disse skal nævnes tre: 1) Ligning (b) gæl-

der kun for den stationære Tilstand. Taleoverføringen beror paa Variationer i den højfrekvente Vekselstrøms Styrke, og overfor disse Variationer vil Forvrængningen gøre sig gældende; 2) da $\frac{d\alpha}{d\omega}$ altid er positiv, saa vokser α altid med ω; 3) dertil kommer, at de primære Konstanter ikke er de samme i (a) og (b), navnlig har R en meget større Værdi i (b) end i (a). (Sammenlign Fig. 18).

Medens der saaledes ikke er nogen Udsigt til, at højfrekvente Vekselstrømme vil finde Anvendelse til Forbedring af Taleoverføringen, saa byder deres Benyttelse paa den anden Side Muligheden af Multiplekstelefoni (og Multiplekstelegrafi). Om den fremtidige Betydning heraf, er det vanskeligt at udtale sig i Øjeblikket, og en nærmere Behandling heraf henhører i hvert Fald naturligst under Radiotelefonien.

F. Standard-Kabel.

§ 22. Det engelske Telefonvæsens Standard-Kabel.

I engelsk Litteratur træffes ofte Begrebet Standard-Kabel i den Sammenhæng, at en eller anden Ledning eller et eller andet Apparat svækker Talen lige saa meget som saa og saa mange miles af Standard-Kabel. Dette udtrykkes ofte paa den Maade, at man siger, at den omtalte Ledning (eller det omtalte Apparat) er ækvivalent med det fundne Antal miles af Standard-Kabel (med Hensyn til Talesvækkelse).

Man bør her altid erindre, at bortset fra den Usikkerhed, der ligger i selve Taleforsøgets Udførelse [se I 24], saa er Resultatet i hvert Fald i nogen Grad afhængig af de benyttede Telefon-Apparaters Egenskaber. Overfor Værdier af α, der er bestemte ad denne Vej, maa man derfor altid udvise nogen Forsigtighed (smlgn. S. 51).

Svarer en Ledning (eller et Apparat) A til a miles af af Standard-Kabel og Ledning (eller Apparat) B til b miles, saa siger man, at A i Serie med B svarer til $a + b$ miles af

Standard-Kabel, idet man indbefatter den Fejl, der eventuelt begaas herved, i Begrebet »terminal loss«.

Konstanterne for det engelske Standard-Kabel fremgaar af følgende Tabel:

		pr. km	pr. statute mile	pr. nautical mile	
R	=	54,6	88	102	Ohm.
C	=	0,0335	0,054	0,0622	$\mu F.$
$\frac{1}{A}$	=	320.10^6	200.10^6	170.10^6	Ohm.
L	=	0,00062	0,001	0,00115	Henry.
α (beregnet)	=	0,064	0,103	0,119	

LITTERATURFORTEGNELSE.

Denne Fortegnelse er langt fra at være komplet; udførligere Fortegnelser findes i 1 og 4.

1. F. Breisig: Theoretische Telegraphie. (Braunschweig, 1910.) [431 S. Kr. 17,10.]
2. J. A. Fleming: The propagation of electric currents in telephone and telegraph conductors. (London, 1911.) [316 S. Kr. 8,50.]
3. C. Baur: Das elektrische Kabel. (Berlin, 1910.) [398 S. Kr. 10,80.]
4. A. E. Kennelly: The application of Hyperbolic Functions to electrical engineering problems. (London, 1912.) [278 S. Kr. 6,00.]
5. O. Heaviside: a) Electrical Papers, Vol. I-II. (London, 1892.) [560 + 597 S.]
   — b) Electromagnetic Theory, Vol. I-III. (London, 1893, 1899, 1912.) [466 + 547 + 519 S. Kr. 46,00.]
6. G. Roessler: Die Fernleitung von Wechselströmen. (Berlin, 1905.) [243 S. Kr. 6,30.]

7a. Comptes Rendus de la I^re^ Conférence internationale des techniciens des administrations des télégraphes et des téléphones de l'Europe. 1 Vol. (Budapest, 1908.)

b. C. R. d. II^e^ Conférence etc. 8 Vol. (Paris, 1910.) Navnlig Bindene: »La téléphonie à grande distance« og »Standarisation des circuits téléphoniques« indeholder en Del Bidrag til Ledningernes Teori.

8. Mitteilungen aus dem Telegraphen-Versuchsamt des Reichspostamts. (I. 1889—1892. II. 1892—1895. III. 1896—1900. IV. 1900—1908.)
9. C. Bright: Submarine Telegraphs. (London, 1898.) [744 S. Kr. 63,00.]

10. A. J. Aldridge: Practical Application of Telephone Transmission Calculations. (Journ. of the Inst. of El. Eng. Vol. 51, p. 390. 1913.)
11. F. Breisig: Über neuere unterseeische Fernsprechkabel. (E. T. Z., p. 223. 1904.)
12. L. Cahen: a) Eléments de calcul des lignes téléphoniques pupinisées. (La Lumière électrique, T. 14, p. 259, 299. 1911.)
    — b) Applications diverses de formules générales de la transmission des courants électriques sinusoidaux. (La Lumière électrique, T. 25, p. 289. 1914.)

13. G. A. Campbell: On Loaded Lines in Telephonic Transmission. (Phil. Mag. Vol. 5, p. 313. 1903.) (Gengivet i fransk Oversættelse i 28 e.)
14. V. Clausen: a) Telefonledninger. (»Elektroteknikeren« p. 15. 1909.)
— b) Telefonledninger med Pupinruller. (»Elektroteknikeren« p. 1. 1911. »Ingeniøren« p. 5. 1911.)
— c) De nye Pupinkabelanlæg ved Københavns Telefon-Aktieselskab. »Elektroteknikeren« p. 29. 1913.)
15. Devaux-Charbonell: a) La téléphonie sous-marine. (Bull. de la Société internationale des électriciens. T. III p. 927. 1913; La lumière électrique. T. 21. No. 5—7. 1913.)
— b) Lignes téléphoniques hétérogènes. La lumière électrique. T. 25, p. 97. 1914.)
16. F. Dolezalek & A. Ebeling: Untersuchungen über telephonische Fernleitungen Pupin'schen Systems. (E. T. Z. p. 1059. 1902.)
17. A. K. Erlang: a) Hovedpunkterne af Teorien for Telefonkabler i elementær Fremstilling. (»Elektroteknikeren« p. 139. 1911.)
— b) Et nyt Kompensationsapparat til Vekselstrømsmaalinger indenfor Telefonien. (»Elektroteknikeren« p. 157. 1913. Journ. of the Inst. of El. Eng. Vol. 51, p. 794. 1913.)
18. J. G. Hill: a) Telephone Transmission. (London. 1906.) [29 S.]
— b) The Loading of submarine Telephone Cables. (Electrical Review, Nov.-Dec. 1912.)
19. J. L. V. W. Jensen: Lovene for Vexelstrømmes bevægelse i lange ledninger. (Förhandl. vid nordiska Teknikermötet i Stockholm 1897, p. 116. Stockholm 1898.)
20. C. E. Krarup: a) Unterseeische Fernsprechkabel mit erhöhter Selbstinduktion. (E. T. Z. p. 344. 1902.)
— b) Moderne Telegrafkabler. (»Elektroteknikeren« p. 33. 1904.)
— c) Câbles téléphoniques modernes. (Journ. Télégraphique. Vol. 29, p. 187. 1905.)
21. Abs. Larsen: a) Beitrag zur Berechnung von Fernsprechkabeln mit Eisendrahtumspinnung. (E.T.Z. p. 1030. 1908.)
— b) Den komplekse Kompensator. (»Elektroteknikeren« p. 183. 1910. E.T.Z. p. 1039. 1910.)
— c) Ein akustischer Wechselstromerzeuger mit regulierbarer Periodenzahl für schwache Ströme. (E.T Z. p. 284. 1911.)

22. F. Lüschen: Über die Berechnung von Pupin-Doppel- und Viererleitungen. (E. T. Z. p. 31. 1913.)
23. A. W. Martin: The Loading of telephone cables circuits. (London. 1909.) [60 S.]
24. W. A. J. O'Meara: Submarine Cables for Long-Distance Telephone Circuits. (Journ. of the Inst. of El. Eng. Vol. 46, p. 309. 1911.)
25. H. Pleijel: a) De l'atténuation dans les lignes pupinisées. (7 b. 1.)
— b) Om Telegrafistekvationen. (Beretning om den anden skandinaviske Matematikerkongres i København 1911. p. 99. 1912.)
26. T. Plummer: Improvements in Telephonic Transmission. (London. 1906.) [32 S.]
27. H. Poincaré: Étude de la propagation du courant periode variable. (l'Éclairage électrique. p. 121, 161, 201, 241. 1904.) Det hovedsagelige Indhold af denne ikke let læselige Afhandling er gengivet i simplificeret Form i 30.
28. M. I. Pupin: a) Propagation of Long Electrical Waves. (Trans. Am. Inst. El. Eng. Vol. 16, p. 93. 1899.)
— b) Wave-Transmission over Non-Uniform Cables. (Trans. Am. Inst. El. Eng. Vol. 17, p. 445. 1900.)
— c) A Note on Loaded Conductors. (El. World and Eng. Vol. 38, p. 587. 1901.)
— d) Wave-Transmission over Non-Uniform Cables. (El. World and Eng. Vol. 39, p. 384. 1902.)
— e) Alle 4 Afhandlinger findes i fransk Oversættelse i »Annales des Postes, Télégraphes et Téléphones. T. I. Supplément au No. 3.
29. M. Siegbahn: a) Über die Darstellung der Vorgänge bei Kabeln durch Raumkurven. (Archiv f. Elektrotechnik. II. p. 57. 1913.)
— b) Über die Ausbreitung der Spannung und des Stromes beim Einschallen eines Kabels an eine Wechselstromquelle. (Archiv f. Elektrotechnik. II. p. 155. 1913.)
30. K. W. Wagner: Die Aussichten der Telephonie und Schnelltelegraphie durch Ozeankabel. (E. T. Z. p. 163, 192. 1910.)
31. C. E. Walsøe: a) Om Selvinduktionens Betydning for Overføring af elektrokinetisk Energi. (Fys. Tidsskr. I. p. 129. 1903.)
— b) Om Telefonering gennem Kabler. (Fys. Tidsskr. II. p. 92. 1903; »Ingeniøren« p. 119, 307. 1903.)

Angaaende Konstruktionen af Telegraf- og Telefonledninger henvises til:

TELEGRAFDIREKTORATET: Vejledning i den ved Statstelegrafvæsenet anvendte Telegraf- og Telefonteknik. (København. 1909).

KONGL. TELEGRAFSTYRELSENS BYGGNADSINSTRUKTION:
I. Liniebyggnad. (Stockholm. 1902.)
II. Nätbyggnad. (Stockolm. 1907.)

TELEGRAPHENBAUORDNUNG. (Berlin. 1902.)

POST OFFICE TELFGRAPHS: Technical Instructions XIII—XIV. (London. 1906—09.)

LORAIN: Cours de construction de lignes télégraphiques et téléphoniques:
I^re Partie. Lignes Aériennes. (Paris. 1914.)
II^e Partie. Lignes Souterraines. (Paris. 1913.)

K. WINNIG: Die Grundlagen der Bautechnik für überirdische Telegraphenlinien. (Braunschweig. 1910.)

C. STILLE: Telegraphen- und Fernsprechkabelanlagen. (Braunschweig. 1911.)

D. COYLE and F. I. O. HOWE: Electric Cables. (London. 1909.)

C. BAUR: Das elektrische Kabel. (Berlin. 1910.)

Angaaende Krarup-Kablers Konstruktion henvises særlig til Nr. 1, 3, 15a, 18b, 20, 21a, 24, 31 samt Tillæg X.

Nogle nyere Pupin-Kabler findes beskrevne i Post Office Electrical Eng. Journal, Vol. 5, p. 55, 1912; Vol. 6, p. 381, 1914, og Vol. 7, p. 32, 1914.

KOMPLEKSE STØRRELSER

SAMT NOGLE BETEGNELSER FRA VEKSELSTRØMSTEORIEN.

1) Er $a+jb=c+jd$, hvor $j=\sqrt{-1}$, saa er $a=c$ og $b=d$.
Af $A\cdot e^{j\varphi}=B\cdot e^{j\psi}$ følger ligeledes $A=B$ og $\varphi=\psi$.
$e^{j\varphi}=\cos\varphi+j\sin\varphi=cis\,\varphi$.

2) For $a+jb=A\cdot e^{j\varphi}=A(\cos\varphi+j\sin\varphi)=A\,cis\,\varphi=A\angle\varphi$, er
$a=A\cos\varphi$ og $b=A\sin\varphi$.
$A=+\sqrt{a^2+b^2}=|a+jb|=$ Modulus $=$ Amplitude; $tg\varphi=\frac{b}{a}$,
$\varphi=$ Argument.
$\sqrt{ja}=(1+j)\sqrt{\frac{a}{2}}$.

Multiplikation med $+j$ svarer til at forøge Argumentet med $\frac{\pi}{2}=90^0$.

3) $\frac{1}{a+jb}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{jb}{a^2+b^2}$.

4) $\frac{c+jd}{a+jb}=\frac{ac+bd}{a^2+b^2}+j\cdot\frac{ad-bc}{a^2+b^2}$; $\frac{A\cdot e^{j\alpha}}{B\cdot e^{j\beta}}=\frac{A}{B}\cdot e^{j(\alpha-\beta)}$.

5) $(a+jb)\cdot(c+jd)=(ac-bd)+j(bc+ad)=A\cdot e^{j\gamma}$,
hvor $A^2=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2=(a^2+b^2)(c^2+d^2)$ og
$tg\,\gamma=\frac{bc+ad}{ac-bd}$.

6) Er $\sqrt{A\cdot e^{j\varphi}}=B\cdot e^{j\psi}$, saa er $B=\sqrt{A}$ og $\psi=\frac{\varphi}{2}$.

Er $\sqrt{c+jd}=a+jb$, faas $c=a^2-b^2$ og $d=2ab$. a og b udtrykkes ved c og d paa følgende Maade: man har $a^2=\frac{1}{2}(c+\sqrt{c^2+d^2})$, [minus Tegnet foran Rodtegnet maa bortkastes, da a^2 skal være positiv]; heraf $b^2=a^2-c=\frac{1}{2}(-c+\sqrt{c^2+d^2})$ og altsaa $a=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{c^2+d^2}+c)}$, $b=\pm\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{c^2+d^2}-c)}$. Fortegnet for a og b bestemmes ved $arc\,tg\,\frac{b}{a}=\frac{1}{2}\,arc\,tg\,\frac{d}{c}$.

7) Er $\frac{A \cdot e^{j\varphi}}{B \cdot e^{j\psi}} = \frac{C \cdot e^{j\gamma}}{D \cdot e^{j\delta}}$, saa er $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ og $\varphi - \psi = \gamma - \delta$.

8) Er $p = p_o \cdot e^{j\varphi}$, saa er $|p + \sqrt{1+p^2}|^2 =$
$\sqrt{1+2p_o^2 cos 2\varphi + p_o^4} + p_o^2 \pm p_o \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{1+2p_o^2 cos 2\varphi + p_o^4} + p_o^2 + cos 2\varphi}$.
Er den ved Ligning $a + jb = \sqrt{1+p^2}$ bestemte Værdi af a positiv, vælges det positive Fortegn, i modsat Fald det negative.

9) Af $a + jb = lgn\,(c + jd)$ faas:
$c + jd = e^{a+jb} = e^a \cdot e^{jb} = e^a\,(cos\,b + j\,sin\,b)$; $c = e^a\,cos\,b$;
$d = e^a\,sin\,b$.
$e^{2a} = c^2 + d^2$; $a = \frac{1}{2} \cdot lgn\,(c^2 + d^2) = lgn\,|c + jd|$; $tg\,b = \frac{d}{c}$;
$b = arc\,tg\,\frac{d}{c}$.

Af $lgn\,(B \cdot e^{j\psi}) = A \cdot e^{j\varphi} = a + jb$ faas:
$lgn\,B + j\psi = A\,cos\,\varphi + jA\,sin\,\varphi$; $lgn\,B = A\,cos\,\varphi = a$;
$\psi = A\,sin\,\varphi = b$.
$A^2 = (lgn\,B)^2 + \psi^2 = a^2 + b^2$; $tg\,\varphi = \frac{\psi}{lgn\,B} = \frac{b}{a}$.

$i = I_1\,cos\,\omega t + I_2\,sin\,\omega t = I_m\,cos\,(\omega t - \varphi_1) = I_m\,sin\,(\omega t + \varphi_2)$,
hvor $I_m = \sqrt{I_1^2 + I_2^2}$, $tg\,\varphi_1 = \frac{I_2}{I_1}$ og $tg\,\varphi_2 = \frac{I_1}{I_2}$.

Nogle Betegnelser fra Vekselstrømsteorien.

Modstand ..... R. Reaktans ..... X. Impedans .... $Z = R + jX$.	Ledningsevne ..... G. Susceptans ..... S. Admittans .... $Y = G + jS$.
$Y = \frac{1}{Z} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2}$; $G = \frac{R}{R^2 + X^2}$; $S = \frac{-X}{R^2 + X^2}$.	
$Z = \frac{1}{Y} = \frac{G - jS}{G^2 + S^2}$; $R = \frac{G}{G^2 + S^2}$; $X = \frac{-S}{G^2 + S^2}$.	

NOGLE FORMLER VEDRØRENDE HYPERBELFUNKTIONER.

1) $\cosh a = \frac{e^a + e^{-a}}{2}$; $\sinh a = \frac{e^a - e^{-a}}{2}$; $tgh\, a = \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}$.

I Stedet for *cosh*, *sinh* og *tgh* bruges ofte Betegnelserne *Cos*, *Sin* og *Tang*.

$\cosh(-a) = \cosh a$; $\sinh(-a) = -\sinh a$; $tgh(-a) = -tgh\, a$.

2) $\cosh j\, a = \cos a$; $\sinh j\, a = j \sin a$; $tgh\, j\, a = j\, tg\, a$.
$\cos j\, a = \cosh a$; $\sin j\, a = j \sinh a$; $tg\, j\, a = j\, tgh\, a$.

cosh og *sinh* har altsaa Perioden $2\pi j$, medens *tgh* har Perioden πj.

3) $\cosh^2 a - \sinh^2 a = 1$; $\sinh a = \sqrt{\cosh^2 a - 1} = \frac{tgh\, a}{\sqrt{1 - tgh^2 a}}$.

$\cosh a = \sqrt{\sinh^2 a + 1} = \frac{1}{\sqrt{1 - tgh^2 a}}$; $tgh\, a = \frac{\sinh a}{\sqrt{\sinh^2 a + 1}} = \frac{\sqrt{\cosh^2 a - 1}}{\cosh a}$.

$\cosh \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh a + 1)}$; $\sinh \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(\cosh a - 1)}$.

$tgh \frac{a}{2} = \frac{\cosh a - 1}{\sinh a} = \frac{\sinh a}{\cosh a + 1} = \sqrt{\frac{\cosh a - 1}{\cosh a + 1}}$.

$\cosh 2a = \cosh^2 a + \sinh^2 a = 2\cosh^2 a - 1 = 1 + 2\sinh^2 a = \frac{1 + tgh^2 a}{1 - tgh^2 a}$.

$\sinh 2a = 2 \sinh a \cdot \cosh a = \frac{2\, tgh\, a}{1 - tgh^2 a}$.

$tgh\, 2a = \frac{2\, tgh\, a}{1 + tgh^2 a}$.

$\sinh a = 2\, tgh \frac{a}{2} + \sinh a \cdot tgh^2 \frac{a}{2}$.

4) $\cosh(a \pm b) = \cosh a \cdot \cosh b \pm \sinh a \cdot \sinh b;$

$\sinh(a \pm b) = \sinh a \cdot \cosh b \pm \cosh a \cdot \sinh b;$

$$tgh(a \pm b) = \frac{tgh\, a \pm tgh\, b}{1 \pm tgh\, a \cdot tgh\, b}.$$

$$\cosh(a + jb) = \cosh a \cdot \cos b + j \sinh. a \cdot \sin b$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(\cosh 2a + \cos 2b)} \cdot e^{j \operatorname{arctg}(tgb \,.\, tgh\, a)}.$$

$$\sinh(a + jb) = \sinh a \cdot \cos b + j \cosh a \cdot \sin b$$
$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(\cosh 2a - \cos 2b)} \cdot e^{j \operatorname{arctg} \frac{tgb}{tgh\, a}}.$$

$$tgh(a + jb) = \frac{tgh\, a + j\, tg\, b}{1 + j\, tgh\, a \cdot tg\, b} = \frac{\sinh 2a + j \sin 2b}{\cosh 2a + \cos 2b}$$
$$= \sqrt{\frac{\cosh 2a - \cos 2b}{\cosh 2a + \cos 2b}} \cdot e^{j \operatorname{arctg} \frac{\sin 2b}{\sinh 2a}}.$$

$$cotgh(a + jb) = \frac{1}{tgh(a + jb)} = \frac{\sinh 2a - j \sin 2b}{\cosh 2a - \cos 2b}.$$

5) $|\cosh(a + jb)| = \sqrt{\cosh^2 a + \cos^2 b} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\cosh 2a + \cos 2b)}$

$|\sinh(a + jb)| = \sqrt{\cosh^2 a - \cos^2 b} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(\cosh 2a - \cos 2b)}$

$|\cosh(a + jb) \pm 1| = \cosh a \pm \cos b.$

6) $$\frac{d \cdot \cosh a}{da} = \sinh a; \quad \frac{d \cdot \sinh a}{da} = \cosh a; \quad \frac{d \cdot tgh\, a}{da} = \frac{1}{\cosh^2 a}.$$

7) $$\cosh a = 1 + \frac{a^2}{1 \cdot 2} + \frac{a^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{a^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots.$$

$$\sinh a = a + \frac{a^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{a^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots.$$

$$tgh\, a = a - \frac{a^3}{3} + \frac{2a^5}{15} - \frac{17a^7}{315} + \ldots. \qquad (a^2 < \frac{\pi^2}{4}).$$

$$\frac{1}{\cosh a} = 1 - \frac{1}{2} a^2 + \frac{5}{24} \cdot a^4 - \frac{61}{720} \cdot a^6 + \ldots. \qquad (a^2 < \frac{\pi^2}{4}).$$

$$\frac{1}{\sinh a} = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{6} a^2 + \frac{7}{360} \cdot a^4 - \frac{31}{15120} \cdot a^6 + \ldots.\right) \qquad (a^2 < \pi^2).$$

$$\frac{1}{tgh\, a} = \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{3} a^2 - \frac{1}{45} \cdot a^4 + \frac{2}{945} \cdot a^6 - \ldots.\right) \qquad (a^2 < \pi^2).$$

8) $\cosh a = b$ skrives ogsaa $a = \operatorname{arccosh} b$ eller $a = \operatorname{arcosh} b$ (eller $a = \cosh^{-1} b$).

$\operatorname{arccosh} a = lgn\,(a + \sqrt{a^2 - 1})$; $\operatorname{arcsinh} a = lgn\,(a + \sqrt{a^2 + 1})$; $\operatorname{arctgh} a = \frac{1}{2} lgn \frac{1+a}{1-a}$.

9) $\frac{d \cdot \operatorname{arccosh} a}{da} = \frac{1}{\sqrt{a^2 - 1}}$; $\frac{d \cdot \operatorname{arcsinh} a}{da} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 1}}$;

$$\frac{d \cdot \operatorname{arctgh} a}{da} = \frac{1}{1 - a^2}.$$

10) $A = x + jy$; $B = z + jw$.

Af $\cosh(\alpha + j\beta) = \frac{A}{B}$ faas ifølge 5):

$\frac{A \pm B}{B} = \cosh(\alpha + j\beta) \pm 1$; $\frac{|A \pm B|}{|B|} = \cosh\alpha \pm \cos\beta$,

altsaa (se Fig. a):

$$\cosh\alpha = \frac{|A+B| + |A-B|}{2|B|} = \frac{|C| + |D|}{2|B|}$$

$$= \frac{\sqrt{(x+z)^2 + (y+w)^2} + \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2}}{2\sqrt{z^2 + w^2}}.$$

$$\cos\beta = \frac{|A+B| - |A-B|}{2|B|} = \frac{|C| - |D|}{2|B|}$$

$$= \frac{\sqrt{(x+z)^2 + (y+w)^2} - \sqrt{(x-z)^2 + (y-w)^2}}{2\sqrt{z^2 + w^2}}.$$

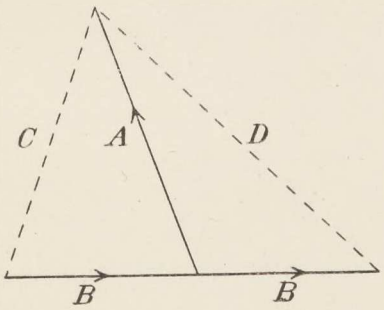


Fig. a.

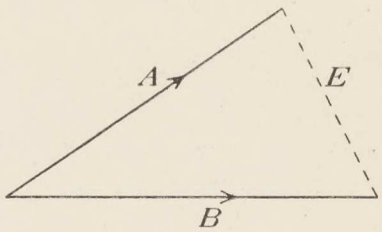


Fig. b.

Af $\sinh(\alpha + j\beta) = \frac{A}{B}$ følger: $\cosh(\alpha + j\beta) = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{B}$, der kan løses ved ovenstaaende.

Af $tgh(\alpha+j\beta)=\frac{A}{B}$ følger:

$$e^{2\alpha}=\frac{|A+B|}{|A-B|}=\frac{\sqrt{(x+z)^2+(y+w)^2}}{\sqrt{(x-z)^2+(y-w)^2}}=\frac{|C|}{|D|},$$

og $\beta=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}$, hvor $tg\varphi_1=\frac{y+w}{x+z}$ og $tg\varphi_2=\frac{y-w}{x-z}$.

Af $tgh^2(\alpha+j\beta)=\frac{A}{B}$ følger (se Fig. b):

$$cosh\,2\alpha=\frac{|A|+|B|}{|A-B|}=\frac{|A|+|B|}{|E|}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{z^2+w^2}}{\sqrt{(x-z)^2+(y-w)^2}}$$

$$cos\,2\beta=\frac{|B|-|A|}{|A-B|}=\frac{|B|-|A|}{|E|}=\frac{\sqrt{z^2+w^2}-\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{(x-z)^2+(y-w)^2}}.$$

Literatur og Tabeller over Hyperbelfunktioner:

»Hütte«.

G. F. Becker and C. E. van Orstrand: Hyperbolic functions. (Washington 1909.) [18 Kr.]

A. E. Kennelly: Tables of complex hyperbolic and circular functions with Chart Atlas. (Cambridge. U. S. A. 1914). [39 Kr.]

C. Burrau: Tafeln der Funktionen Cosinus und Sinus. (Berlin 1907.) [3,60 Kr.]

W. Ligowski: Tafeln der Hyperbelfunctionen und der Kreisfunctionen. (Berlin 1890.)

HVIRVELSTRØMSTAB.

a. Hvirvelstrømstab i og effektiv Modstand af retlinede, runde Metaltraade.

I det følgende gives Tabeller og Formler til Beregning af Hvirvelstrømstabet i retlinede, runde Metaltraade, som befinder sig i et harmonisk varierende, magnetisk Felt, hvis Retning er parallel med Traadens Akse, samt til Beregning af den effektive Modstand og den indre Selvinduktion i saadanne Traade. Der benyttes følgende Betegnelser:

Traadens Radius ..... a cm.
» Tværsnitsareal..... A cm^2.
» Modstandsfylde..... ϱ $\frac{\text{Ohm} \cdot \text{m}}{\text{mm}^2}$.
» Permeabilitet, der antages konstant..... μ
Det ydre magnetiske Felt..... H Gauss,
hvor $H = H_m \cdot \cos \omega t = H_m \cdot \cos 2\pi n t$.
Det resulterende Kraftlinieantal i Traaden, Φ,
hvor $\Phi = \int_0^a \mu \cdot H_r \cdot 2\pi r \cdot dr = \Phi_0 \cdot \cos(\omega t - \delta)$.
Den gennemsnitlige Varmeudvikling pr. cm Traadlængde pr. Sekund ..... W Watt.

Ved Modstands- og Selvinduktionsberegningen indføres endvidere følgende Betegnelser:

Den effektive Modstand pr. cm. Traadlængde r_ω Ohm.
Jævnstrømsmodstanden ..... r_0 Ohm.
Den eff., indre Selvinduktion..... $l_{i\omega}$ Henry.

Endvidere indføres Størrelsen

$$m^2 = \frac{4\pi\mu\omega}{10^5\varrho} = \frac{8\pi^2\mu n}{10^5\varrho}.$$

Er R_k Modstanden i Ohm pr. m Traadlængde, faas

$$m^2a^2 = \frac{4\mu\omega}{10^7 R_k};$$

hvoraf fremgaar, at ma for konstante μ og ω kun er afhængig af Lederens Modstand pr. Længdeenhed.

Med disse Betegnelser kan man sætte:

$$\Phi_0 = A \cdot \mu \cdot H_m \cdot \varphi(ma),$$

$$W = \tfrac{1}{2} \cdot \int_0^a I_r^2 \cdot 2\pi r \varrho \cdot 10^{-4} \cdot dr = \frac{\mu n}{8 \cdot 10^7} \cdot A \cdot H_m^2 \cdot w(ma),$$

$$r_\omega = r_0 \cdot r(ma),$$

samt

$$l_{i\omega} = \frac{\mu}{10^9} \cdot l_1(ma).$$

Værdierne af Funktionerne $\varphi(x)$, $w(x)$, $r(x)$ og $l_1(x)$ findes opførte i hosstaaende Tabel for Værdier af x varierende fra 0,00 til 6,00 med Spring paa 0,10; for Funktionerne gælder følgende Tilnærmelsesesformler med en Nøjagtighed, der gør den største Fejl mindre end 1 ‰. De eksakte Formler for de nævnte Funktioner, der er ret indviklede, findes angivne i den paa næste Side nævnte Afhandling.

TILNÆRMELSESFORMLER.

Funktion	$x < 1$	$x > 6$
$\varphi(x)$	$1 - \frac{5}{384}x^4 = 1 - 0{,}01\,302x^4$	$\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2\sqrt{2}} + \frac{1}{4x^3}$ $= 2 \cdot x^{-1} - 0{,}7071x^{-2} + 0{,}25 \cdot x^{-3}$
$w(x)$	$\frac{x^2}{4}\left(1 - \frac{11}{384} \cdot x^4\right)$ $= \frac{x^2}{4}(1 - 0{,}02\,865x^4)$	$\frac{2\sqrt{2}}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3 \cdot 2\sqrt{2}}$ $= 2{,}8284 \cdot x^{-1} - 2x^{-2} - 0{,}3536x^{-3}$
$r(x)$	$1 + \frac{x^4}{192} = 1 + 0{,}0\,052x^4$	$\frac{x}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{4} + \frac{3}{x \cdot 16\sqrt{2}}$ $= 0{,}35\,355x + 0{,}25 + 0{,}1326x^{-1}$
$l_1(x)$	$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^4}{384}\right)$ $= 0{,}5 - 0{,}00\,130x^4$	$\frac{\sqrt{2}}{x} - \frac{3}{x^3 4\sqrt{2}} - \frac{3}{4x^4}$ $= 1{,}4142x^{-1} - 0{,}5303x^{-3} - 0{,}75x^{-4}$

TABEL OVER $\varphi(x)$, $w(x)$, $r(x)$ OG $l_1(x)$.

x	$\varphi(x)$	$w(x)$	$r(x)$	$l_1(x)$	x	$\varphi(x)$	$w(x)$	$r(x)$	$l_1(x)$
0.00	1.0000	0.0000	1.000	0.5000	3.00	0.6153	0.7199	1.318	0.4226
0.10	1.0000	0.0025	1.000	0.5000	3.10	0.5956	0.7072	1.351	0.4149
0,20	1.0000	0.0100	1.000	0.5000	3.20	0 5770	0.6937	1.385	0.4070
0.30	0.9999	0.0225	1.000	0.5000	3.30	0.5593	0.6797	1.420	0.3990
0.40	0.9997	0.0400	1.000	0.5000	3.40	0.5427	0.6654	1.456	0.3909
0.50	0.9992	0.0624	1.000	0.4999	3.50	0.5270	0.6512	1.492	0.3828
0.60	0.9983	0.0897	1.001	0.4998	3.60	0.5123	0.6371	1.529	0.3746
0.70	0.9969	0.1217	1.001	0.4997	3.70	0.4984	0.6233	1.566	0.3666
0.80	0.9947	0.1581	1.002	0.4995	3,80	0.4853	0.6098	1.603	0.3586
0.90	0.9916	0.1988	1.003	0.4991	3.90	0.4729	0.5968	1.641	0.3508
1.00	0.9873	0.2430	1.005	0.4987	4.00	0.4613	0.5842	1.678	0.3432
1.10	0.9816	0.2903	1.008	0.4981	4.10	0.4503	0.5721	1.715	0.3357
1.20	0.9742	0.3399	1.011	0.4973	4.20	0.4399	0.5605	1.752	0.3284
1.30	0.9651	0.3906	1.015	0.4963	4.30	0.4300	0.5493	1.789	0.3213
1.40	0.9541	0.4416	1.020	0.4951	4.40	0.4207	0.5386	1.826	0.3145
1.50	0.9410	0,4916	1.026	0.4936	4.50	0.4118	0.5284	1.863	0.3078
1.60	0.9258	0.5395	1.033	0.4917	4.60	0.4033	0.5186	1.899	0.3014
1.70	0,9087	0.5841	1.042	0.4895	4.70	0.3952	0.5092	1.935	0.2952
1.80	0.8898	0.6245	1 052	0.4870	4.80	0.3874	0.5002	1.971	0.2893
1.90	0.8692	0.6599	1.064	0.4840	4.90	0.3800	0.4915	2.007	0.2835
2.00	0.8472	0.6898	1.078	0.4806	5.00	0.3729	0.4832	2.043	0.2780
2.10	0.8241	0.7138	1.094	0.4767	5.10	0.3661	0.4752	2.078	0.2727
2.20	0.8002	0.7321	1.111	0.4724	5.20	0.3595	0.4675	2.114	0.2675
2.30	0.7759	0.7447	1.131	0.4676	5.30	0.3532	0.4600	2.149	0.2626
2.40	0.7515	0.7521	1.152	0.4624	5.40	0.3471	0.4528	2.184	0.2578
2.50	0.7272	0.7549	1.175	0.4567	5.50	0.3412	0.4458	2.219	0.2532
2.60	0.7034	0.7535	1.201	0.4506	5.60	0.3355	0.4391	2.254	0.2488
2.70	0.6801	0.7488	1.228	0.4441	5.70	0.3300	0.4325	2.289	0.2446
2.80	0.6576	0.7412	1.256	0.4373	5.80	0.3246	0.4262	2.324	0.2404
2.90	0.6360	0.7314	1.286	0.4301	5.90	0.3195	0.4200	2.359	0.2364
3.00	0.6153	0,7199	1.318	0.4226	6.00	0.3145	0.4141	2.394	0.2326

(Uddrag af P. O. Pedersen: Wirbelstromverluste in und effektiver Widerstand von geraden, runden Metallzylindern. [Jahrb. d. drahtl. Telegr. IV p. 501. 1911].)

b. Hvirvelstrømstab i plane Metalplader, anbragte i et harmonisk varierende, magnetisk Felt, hvis Retning er parallel med Pladen.

Er Pladens Tykkelse $2a$ cm, og benyttes iøvrigt de samme Betegnelser som i *a.*, er Energitabet W_1 maalt i Watt pr. cm^2 af Pladen (altsaa for et Pladevolumen af $2a$ cm^3), bestemt ved

$$W_1 = \frac{5 \cdot \mu\omega \cdot a}{10^8} \cdot w_1(ma\sqrt{2}) H_m^2, \ldots \text{Watt pr. cm}^2 \text{ af Pladen.}$$

hvor

$$w_1(ma\sqrt{2}) = \frac{1}{ma\sqrt{2}} \cdot \frac{\sinh ma\sqrt{2} - \sin ma\sqrt{2}}{\cosh ma\sqrt{2} + \cos ma\sqrt{2}}.$$

For $ma\sqrt{2} < 0{,}5$ er med Tilnærmelse $w_1(ma\sqrt{2}) = \frac{m^2a^2}{3}$

$$= \frac{4\pi\mu\omega}{3 \cdot 10^5 \cdot \varrho} \cdot a^2.$$

For $ma\sqrt{2} > 10$ er med Tilnærmelse $w_1(ma\sqrt{2}) = \frac{1}{ma\sqrt{2}}$

$$= \frac{\sqrt{10^5 \cdot \varrho}}{a\sqrt{8\pi\mu\omega}}.$$

$w_1(x)$ er Maksimum for $x = 2{,}254$ og $w_1(x)_{maks} = 0{,}4172$.

c. Forholdet η mellem Forøgelsen $\triangle R$ af en Spoles effektive Mod stand paa Grund af Hvirvelstrømme i Jernkærnen og den af Jernkærnen bevirkede Forøgelse af Selvinduktionen $\triangle L$.

Bestaar Kærnen af runde Traade, hvis Retning falder sammen med Feltets, og er Traadene saa tynde, at man med tilstrækkelig Tilnærmelse har $w(ma) = \frac{m^2a^2}{4}$, saa er:

$$\eta = \frac{\triangle R}{\triangle L} = \frac{\mu \cdot \omega^2 \cdot \pi a^2}{2 \cdot 10^5 \cdot \varrho} = \frac{\mu\omega^2}{2 \cdot 10^7} \cdot \frac{1}{R_K}, \ldots\ldots\ldots \frac{\text{Ohm}}{\text{Henry}}.$$

hvor R_K er Modstanden af 1 m Jerntraad i Ohm.

Er Kærnen derimod dannet af tynde Jernplader, hvis Retning ligeledes falder sammen med Feltets, og er Pladerne saa tynde, at nan med tilstrækkelig Tilnærmelse har $w_1(ma\sqrt{2}) = \frac{m^2a^2}{3}$, saa er: $\eta_1 = \frac{\triangle R}{\triangle L} = \frac{\pi\mu\omega^2 \cdot 4a^2}{3 \cdot 10^5 \cdot \varrho} = \frac{\pi\mu\omega^2}{3 \cdot 10^7} \cdot \frac{1}{R_K'}, \ldots\ldots \frac{\text{Henry}}{\text{Ohm}}$.

hvor R_K' er Modstanden af en 1 m lang Jerntraad, hvis Tværsnitsareal er $4a^2$.

For samme Jernmateriale og samme Værdi af a er $\frac{\eta_1}{\eta} = \frac{8}{3}$.

OVERSIGT OVER NOGLE I KABELTEKNIKKEN HYPPIGT BENYTTEDE, ENGELSKE MAAL OG DERES OVERFØRING TIL METERMAAL.

1 km = 0,5396 nautical mile = 0,6214 (statute) mile.
1 nautical mile = 1,8532 km = 1,1515 (statute) mile.
1 (statute) mile = 1,6094 km = 0,8684 nautical mile.
Nautical mile benævnes ofte »knot«.

Traadtykkelser opgives hyppigt i mil. (1 mil = 0,001 eng. Tomme.)
1 mil = 0,02540 mm; 1 mm = 39,370 mils.

I Stedet for Traaddiameter opgives ofte Vægten K af Kobbertraaden i lbs per mile.
1 kg = 2,2046 lbs; 1 lb = 0,4536 kg.

1 kg pr. km = 4,0854 lbs pr. naut. mile = 3,5480 lbs pr. st. mile.
1 lbs pr. naut. mile = 0,24477 kg pr. km = 0,8684 lbs pr. st. mile.
1 lbs pr. st. mile = 0,28185 kg pr. km = 1,1515 lbs pr. naut. -

For en Kobbertraad, der vejer K lbs pr. statute mile (Enkeltledning), er tilnærmelsesvis
Diametren $d = 0{,}2\sqrt{K}$ mm, Tværsnitsarealet = 0,03145 K mm² og Modstanden $= \frac{1}{K} \cdot 544$ Ohm pr. km Traad.

Vejer Kobbertraaden K lbs pr. nautical mile (Enkeltledning) er:
Diametren $d = 0{,}186\sqrt{K}$ mm, Tværsnitsarealet = 0,02723 K mm² og Modstanden $= \frac{1}{K} \cdot 629$ Ohm pr. km Traad.

Guttaperchas Vægtfylde sættes til 0,98.
Et Guttapercharør med ydre Diameter D og indre d vejer:
naar D og d maales i mm:

$$0{,}7697\,(D^2 - d^2)\,\frac{\text{kg}}{\text{km}} = 2{,}731\,(D^2 - d^2)\,\frac{\text{lbs}}{\text{st. mile}} = 3{,}1447\,(D^2 - d^2)\,\frac{\text{lbs}}{\text{naut. mile}},$$

naar D og d maales i mils:

$$\frac{D^2 - d^2}{2014}\,\frac{\text{kg}}{\text{km}} = \frac{D^2 - d^2}{568}\,\frac{\text{lbs}}{\text{st. mile}} = \frac{D^2 - d^2}{493}\,\frac{\text{lbs}}{\text{naut. mils.}}.$$

En Kobbertraad med Diameter d mm vejer ca. $7\,d^2 \frac{\text{kg}}{\text{km}}$.

For en med Guttapercha isoleret Kobbertraad med Kobbervægten K og Guttaperchavægten G kan den ydre Diameter D findes af følgende Tabel:

	K og G opgivne i		
	kg pr. km	lbs pr. naut. mile	lbs pr. st. mile
D i mm	$\sqrt{0{,}143\,K + 1{,}30\,G}$	$\sqrt{0{,}035\,K + 0{,}318\,G}$	$\sqrt{0{,}0403\,K + 0{,}366\,G}$
D i mils	$\sqrt{221\,K + 2014\,G}$	$\sqrt{54{,}2\,K + 493\,G}$	$\sqrt{62{,}4\,K + 568\,G}$

Forholdet $\frac{D}{d}$ bestemmes ved

$$\frac{D}{d} = \sqrt{1 + 9{,}1\,\frac{G}{K}}.$$

Er Kobberkernen ikke massiv, saaledes at dens Vægt pr. km er $u \cdot d^2$ kg i Stedet for $7\,d^2$, hvor $u < 7$, saa skal i Formlerne for D Faktoren foran K multipliceres med $\frac{7}{u}$, og man har:

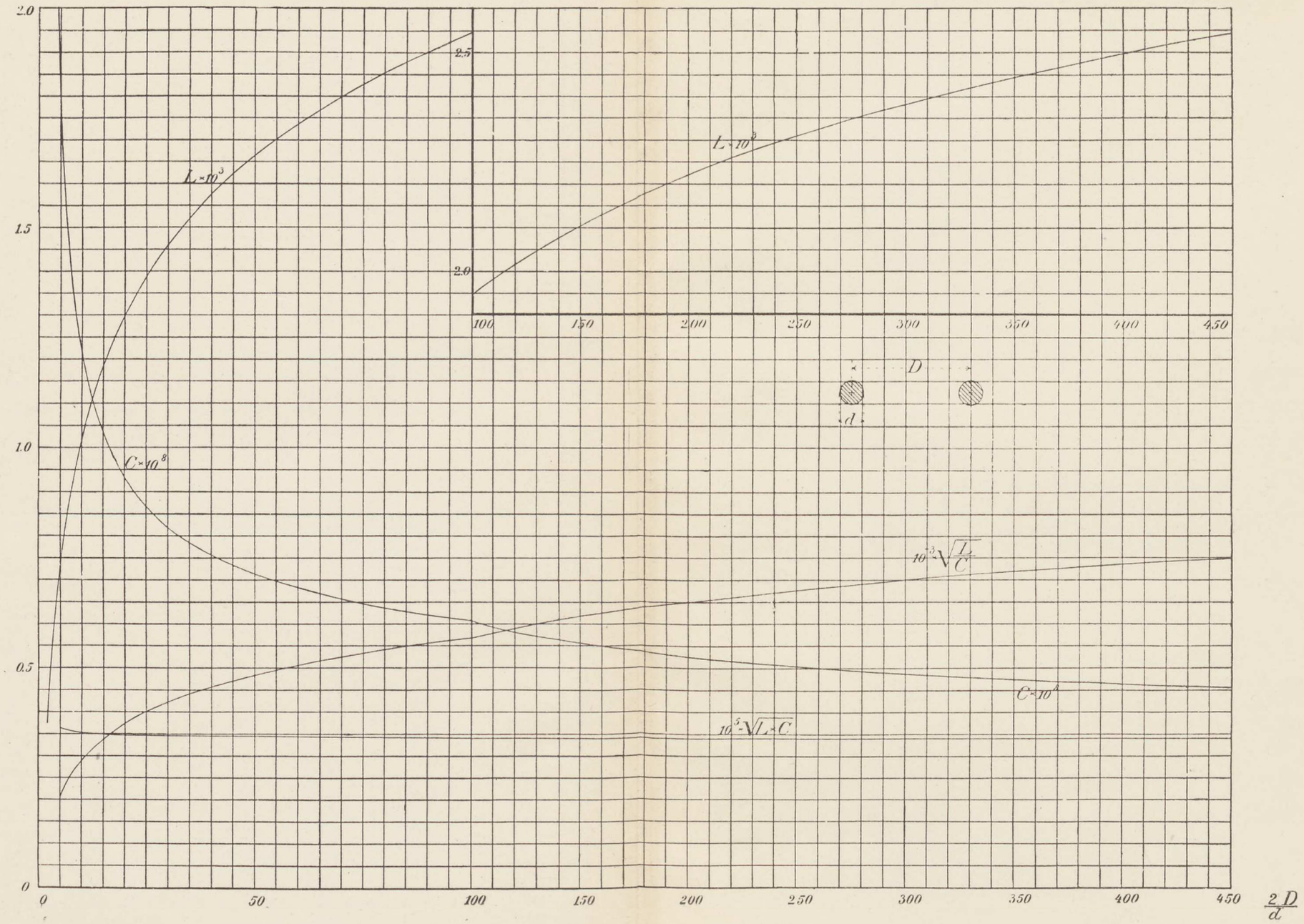
$$\frac{D}{d} = \sqrt{1 + 1{,}3\,u\,\frac{G}{K}}.$$

TABEL OVER NOGLE SAMMENHØRENDE VÆRDIER AF K, G, d og D.

K	d i mm (Leder af 1 rund Traad)		K	G	D i mm	
lbs per	naut. mile	stat. mile	lbs naut. mile	lbs naut. mile	for Leder bestaaende af 1 rund Traad	for Leder bestaaende af 7 lige tykke Traade
10	0,59	0,63		100	5,94	6,02
20	0,83	0,89	100	150	7,15	7,22
30	1,02	1,10		200	8,19	8,26
40	1,18	1,26		250	9,10	9,16
50	1,32	1,41				
				150	7,28	7,38
60	1,44	1,55	150	200	8,29	8,38
70	1,56	1,67		250	9,20	9,29
80	1,66	1,79		300	10,0	10,1
90	1,77	1,90		200	8,40	8,52
100	1,86	2,00	200	250	9,30	9,40
				300	10,1	10,2
150	2,28	2,45				
200	2,63	2,83		250	9,39	9,52
250	2,94	3,16	250	300	10,2	10,3
300	3,22	3,47		350	11,0	11,1
350	3,48	3,74				

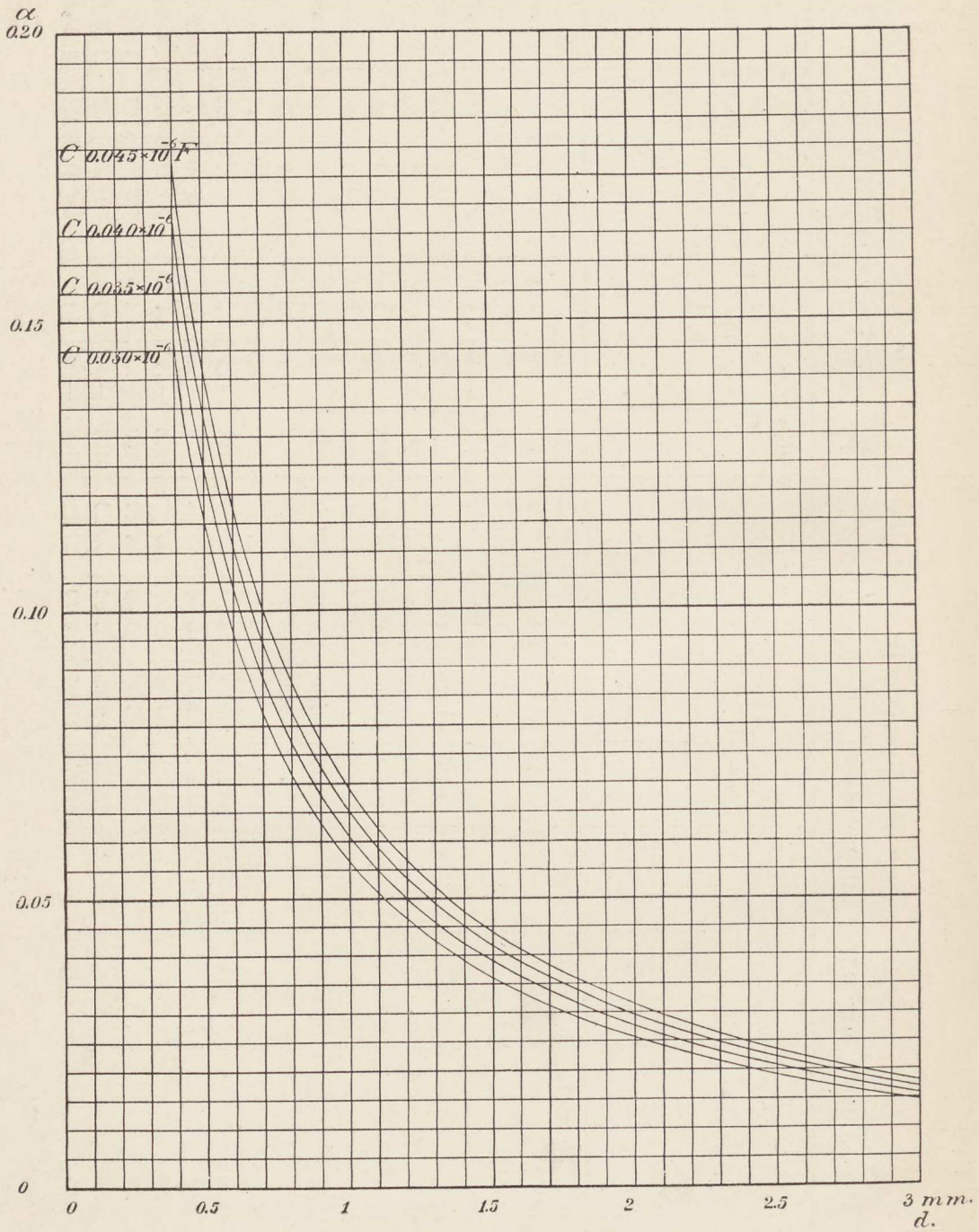
L og C for Luftledninger. $L = 4\left(lgn\,\frac{2D}{d} + \frac{1}{4}\right)\cdot 10^{-4}\,\frac{\text{H}}{\text{km.}}$; $C = \frac{10^{-6}}{36\,lgn\,\frac{D+\sqrt{D^2-d^2}}{d}}\cdot\frac{\text{F}}{\text{km.}}$.

$L\cdot 10^3$.
$C\cdot 10^8$.
$\sqrt{LC}\cdot 10^5$.
$\sqrt{\frac{L}{C}}\cdot 10^{-3}$.

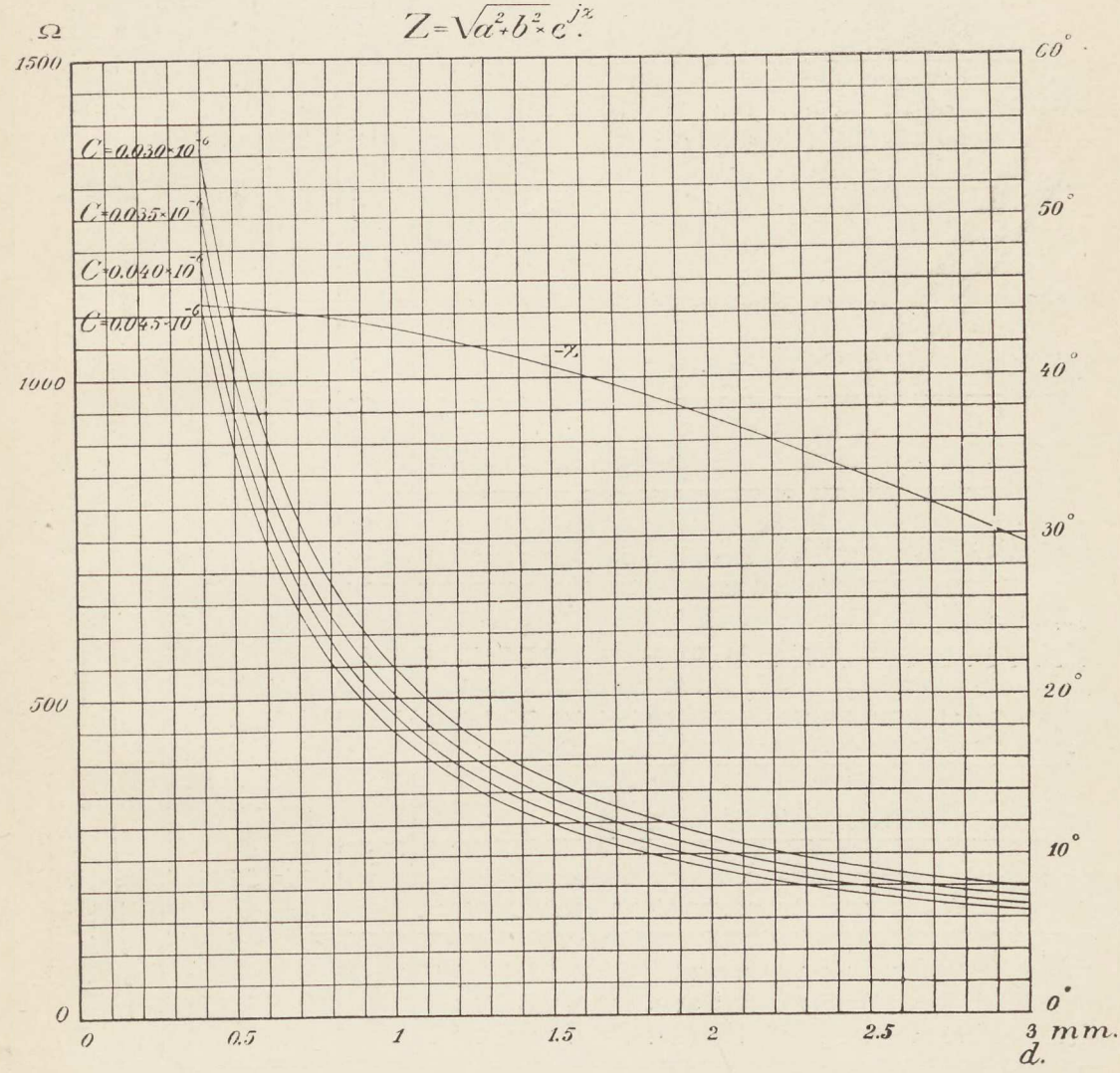


Konstanter for papir-luftisolerede Blyrørskabler for $\omega = 5000$. $\left(R = \frac{44 \cdot 56}{d^2} \cdot \frac{\text{Ohm}}{\text{km.}}\right)$

Traad-dia-meter.	Primære Konstanter				Sekundære Konstanter. $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \cdot e^{j\frac{\varphi+\psi}{2}}$				$Z = a + jb = \sqrt{a^2+b^2} \cdot e^{j\chi}$				Bølge- længde	Bølge- hastighed.
d	R	L	C	A	α	β	$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\varphi+\psi}{2}$	a	b	$\sqrt{a^2+b^2}$	χ	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$	$v = \frac{\omega}{\beta}$
mm	$\frac{\text{Ohm}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Henry}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Farad}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Siemens}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Tal}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Tal}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Tal}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Grad}}{\text{km.}}$	Ohm	Ohm	Ohm	Grad	km.	$\frac{\text{km}}{\text{sek}}$
0,4	278,5	$0{,}60 \times 10^{-3}$	$0{,}04 \times 10^{-6}$	3×10^{-6}	0,167	0.167	0,236	44° 53′	839	—830	1180	— 44° 42′	37,7	30030
0,5	178,3	—	—	—	0,133	0.133	0,189	45° 5′	673	—662	944	— 44° 31′	47,0	37370
0,6	123,8	—	—	—	0,111	0,112	0,157	45° 15′	563	—550	787	- 44° 18′	56,2	44720
0,7	90,9	—	—	—	0,0945	0,0962	0,135	45° 31′	485	—469	674	— 44° 4′	65,3	51960
0,8	69,7	—	—	—	0.0823	0,0846	0,118	45° 47′	426	—408	590	— 43° 46′	71,2	59080
0,9	55,0	—	—	—	0,0728	0,0757	0,105	46° 7′	381	—361	525	— 43° 27′	83,0	66080
1,0	44,6	—	—	—	0,0651	0,0686	0,0946	46° 30′	345	—323	473	— 43° 4′	91,6	72910
1,2	30,9	—	—	—	0,0534	0,0580	0,0788	47° 21′	292	—265	394	— 42° 14′	108	86280
1,4	22,7	—	—	—	0,0450	0,0506	0,0677	48° 20′	254	—223	338	— 41° 15′	124	98900
1.6	17,4	—	—	—	0,0386	0,0452	0,0594	49° 28′	227	—192	297	— 40° 7′	139	110700
1,8	13,8	—	—	—	0,0337	0,0411	0,0532	50° 42′	207	—167	266	— 38° 52′	153	121600
2,0	11,14	—	—	—	0,0295	0,0379	0,0480	52° 6′	191	—146	240	— 37° 27′	166	131900
2,2	9,21	—	—	—	0,0261	0,0354	0,0440	53° 36′	178	—129	220	— 36° 0′	177	141200
2,4	7,74	—	—	—	0,0233	0,0334	0,0407	55° 9′	168	—115	203	— 34° 24′	188	149500
2,6	6,59	—	—	—	0,0208	0,0318	0,0380	56° 49′	160	—103	190	— 32° 46′	197	157000
2,8	5,68	—	—	—	0,0188	0,0306	0,0359	58° 29′	154	— 93	179	— 31° 5′	206	163600
3,0	4,95	—	—	—	0,0169	0,0295	0,0340	60° 11′	148	— 84	170	— 29° 24′	213	169400


α
0.20
0.15
0.10
0.05
0
C 0.045×10⁻⁶ F
C 0.040×10⁻⁶
C 0.035×10⁻⁶
C 0.030×10⁻⁶
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3 mm.
d.

α og $Z = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot e^{j\chi}$ for papir-luftisolerede Blyrørskabler for $L = 0{,}6 \cdot 10^3 \frac{\text{H}}{\text{km.}}$ og $A = 3 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Siemens}}{\text{km.}}$ samt for følgende Værdier af C: 0,030, 0,035 0,040, $0{,}045 \cdot 10^{-6} \frac{\text{F}}{\text{km.}}$. $\left(R = \frac{44{,}56}{\text{d}^2}\right)$.



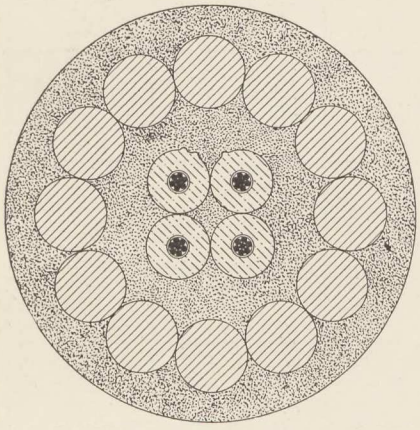
Konstanter for Luftledninger for $\omega = 5000$.

$$\left(R = \frac{44{,}56}{d^2} \cdot \frac{\text{Ohm}}{\text{km.}},\quad L = 4\left(\lg n \frac{2D}{d} + \frac{1}{4}\right) \cdot 10^{-4} \frac{\text{Henry}}{\text{km.}},\quad C = \frac{10^{-6}}{36\, lgn \frac{2D}{d}} + 5 \cdot 10^{-10} \frac{\text{Farad}}{\text{km.}} \right).$$

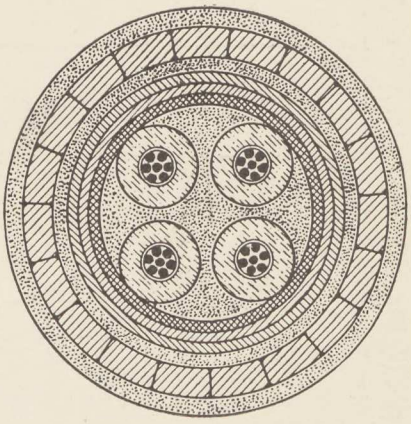
Traad-		Primære Konstanter.				Sekundære Konstanter. $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \cdot e^{j\frac{\omega+\psi}{2}}$				$Z = a + jb = \sqrt{a^2+b^2} : e^{j\chi}$				Bølge-	
diameter	afstand													længde	hastighed
d	D	R	L	C	A	α	β	$\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$	$\frac{\omega+\psi}{2}$	a	b	$\sqrt{a^2+b^2}$	χ	$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$	$v = \frac{\omega}{\beta}$
mm	mm	$\frac{\text{Ohm}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Henry}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Farad}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Siemens}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Tal}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Tal}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Tal}}{\text{km.}}$	$\frac{\text{Grad}}{\text{km.}}$	Ohm	Ohm	Ohm	Grad	km.	$\frac{\text{km.}}{\text{sek.}}$
2,0	200	11,14	$2{,}22 \cdot 10^{-3}$	$5{,}74 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-6}$	0,00884	0,0194	0,0213	65° 27′	692	—260	739	— 20° 34′	325	258000
2,5	—	7,13	2,13	5,97	—	632	185	196	71° 11′	632	—169	654	— 14° 59′	339	270
3,0	—	4,95	2,06	6,18	—	477	182	188	75° 18′	596	—116	607	— 11° 0′	346	275
3,5	—	3,64	2,00	6,36	—	377	180	184	78° 11′	571	— 83	577	— 8° 13′	349	278
4,0	—	2,79	1,94	6,53	—	308	179	182	80° 14′	552	— 61	556	— 6° 16′	351	279
4,5	—	2,20	1,89	6,69	—	259	179	181	81° 46′	537	— 45	538	— 4° 50′	352	280
5,0	—	1,78	1,85	6,84	—	239	178	180	82° 53′	524	— 34	525	— 3° 46′	352	280
2,0	300	11,14	2.38	5,37	—	841	192	210	66° 20′	734	—259	778	— 19° 25′	327	260
2,5	—	7.13	2,29	5,57	—	600	185	194	72° 0′	675	—167	695	— 13° 54′	340	271
3,0	—	4,95	2,22	5,74	—	453	181	187	75° 59	639	—113	649	— 10° 2′	347	276
3,5	—	3,64	2,16	5,90	—	358	180	184	78° 45′	615	— 80	621	— 7° 22′	349	278
4,0	—	2,79	2,10	6,04	—	294	179	182	80° 41′	597	— 58	600	— 5° 32′	351	279
4.5	—	2,20	2 06	6,18	—	247	179	180	82° 7′	581	— 43	583	— 4° 11′	352	280
5,0	—	1,78	2,02	6,30	—	215	178	180	83° 10′	568	— 32	569	— 3° 12′	352	280
2 0	400	11,14	2,50	5.14	—	815	191	208	66° 54′	764	—258	806	— 18° 39′	329	262
2.5	—	7,13	2.41	5,32	—	580	184	193	72° 31′	705	—165	724	— 13° 11′	341	272
3,0	—	4,95	2,33	5,47	—	438	181	187	76° 25′	671	—111	680	— 9° 24′	347	276
3,5	—	3,64	2,27	5,61	—	347	180	183	79° 5′	646	— 78	651	— 6° 51′	349	278
4,0	—	2,79	2,22	5,74	—	285	179	181	80° 57′	628	— 56	630	— 5° 4′	351	279
4,5	—	2,20	2,17	5,86	—	241	179	180	82° 20′	613	— 41	614	— 3° 47′	351	280
5,0	—	1,78	2,13	5,97	—	209	179	180	83° 20′	600	— 30	601	— 2° 50′	352	280
2,0	500	11,14	2,59	4,97	—	796	191	207	67° 20′	788	—257	829	— 18° 4′	330	262
2,5	—	7,13	2,50	5,14	—	566	184	192	72° 55′	729	—163	747	— 12° 38′	342	272
3,0	—	4,95	2.42	5,28	—	428	181	186	76° 43′	695	—109	703	— 8° 57′	347	276
3,5	—	3,64	2,36	5,41	—	339	180	183	79° 19′	671	— 76	675	— 6° 27′	349	278
4,0	—	2.79	2,31	5,53	—	279	179	181	81° 9′	652	— 54	655	— 4° 44′	350	279
4,5	—	2 20	2,26	5,65	—	237	179	180	82° 28′	637	— 39	638	— 3° 29′	351	279
5,0	—	1,78	2,22	5,74	—	206	179	180	83° 26′	624	— 28	625	— 2° 35′	352	280

Bogsamling.

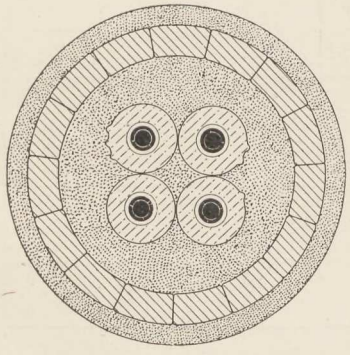
OVERSIGT OVER NOGLE KRARUP-KABLER*).



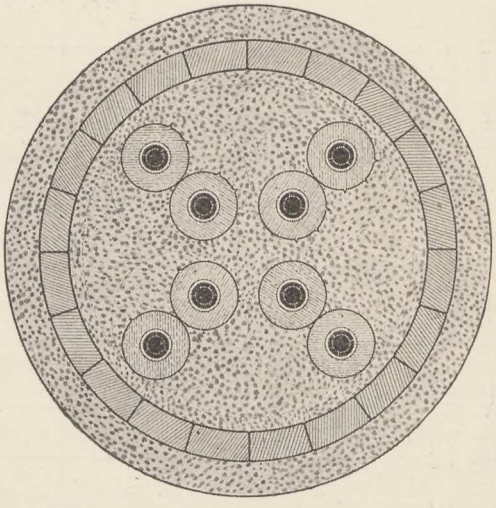
I. 4-ledet Telefonkabel 1902. Sjælland—Sverrig (ved Helsingør).



II. 4-ledet Telefonkabel 1903. Lolland—Fehmern.



III. 4-ledet Telefonkabel 1904. Sjælland—Samsø—Jylland.



IV. 8-ledet Telefonkabel 1906-07.
1906: Sjælland—Fyen—Jylland.
1907: Sjælland—Falster—Lolland.

Alle de viste Kabeltværsnit er i sand Størrelse.

*) Klicheer og Talmateriale er velvilligst stillet til Raadighed af Telegrafdirektoratets tekniske Afdeling.

Oversigt over Konstanterne for nogle Krarup-Kabler. (Se Kabeltværsnit Side 113 og 116.)

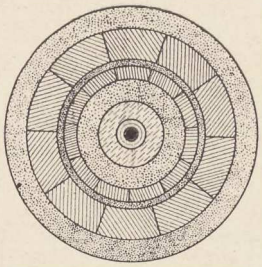
Kabel	Kobbertværsnit	Isolationens Art	Isol. ydre Diam.	Jernbevikling: Tykkelse	Jernbevikling: Antal Lag	Jernbevikling: Vikl. pr. Lag	ω	Primære Konstanter: R	L	C	A	α beregnet efter Formel $\alpha = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{A}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$	α maalt	Bemærkninger
	mm^2		mm	mm		Tal / cm		Ohm / km	Henry / km	μF / km	Siemens / km	Tal / km	Tal / km	
I.	3,52	Gutta	8,2	0,2	1	40	0	9,52		0,0873				
							4398	10,22	$5{,}6 \cdot 10^{-3}$	,085	$(9{,}0 \cdot 10^{-6})$	0,021	0,021	Maalt efter Udlægning.
							6748	12,14	5,6 »	,085	(13,8 »)	,025	,022	
II.	10,0	Impr. Papir	11,0	0,3	1	(26)	0	3,41		,0812				
							4461	4,78	5,08 »	,0745	(6,7 »)	,010		Fabriksmaaling.
							6918	5,52	5,00 »	,0740	(10,2 »)	,012		
							9180	5,90	5,12 »	,0730	(13,4 »)	,013		
III.	8,0	Gutta	9,0	0,2	3	40	0	4,28		,134				
							5743	4,50	8,7 »	,120	(16,5 »)	,0106	,0119	Fabriksmaaling.
IV. 06.	8,0	Gutta	9,0	0,2	3	40	0	4,24		,132				
							4530	5,36	8,16 »	,118	(12,8 »)	,012		Fabriksmaaling.
							6987	6,02	8,16 »	,120	(20,2 »)	,014		
IV. 07.	8,0	Gutta	9,0	0,2	3	40	0	4,22		,137				
							4807	4,66	9,28 »	,128	(14,7 »)	,0107		Fabriksmaaling.
							5699	4,76	9,30 »	,127	(17,3 »)	,011		
							6811	4,98	9,32 »	,127	(20,7 »)	,012		
							7611	5,08	9,32 »	,127	(23,2 »)	,0125		

[1] V.	2,78	Gutta	8,5	0,5	2	16	0	5,73		,244				
							5309	8,35	11,1 »	,216	(27,4 »)	,0215	,0213	Maaling i Laboratorium med 50 m Dobbeltkore.
							6220	9,35	11,1 »	,216	(32,2 »)	,0243	,0245	
							7251	10,8	11,1 »	,216	(37,6 »)	,028	,0291	
							7980	11,9	11,1 »	,216	(41,3 »)	,031	,0334	
VI.	7,23	Tørt Papir	7,7	0,2	3	40	0	4,77		,0470				
							4807		8,57 »	,0464			,00688	Maalt efter Udlægning.
							5718		8,69 »	,0459			,00726	
							6252		8,55 »	,0461			,00770	
							7207		8,46 »	,0470			,00786	
VII.	8,0	Tørt Papir	8,5	0,2	3	40	0	3,99		,0399				
							5008	4,33	9,51 »	,0364	3,4 »	,00512	,00513	
							5718	4,38	9,29 »	,0370	3,7 »	,00530	,00530	Fabriksmaaling.
	3,0	»	14,0	0	0	0	0	11,07		,0306				
							6503	11,75	1,21 »	,0206			,0210	
[2] VIII.	4,96	Gutta	9,3	0,2	3	42	0	6,92		,102				
							5027	7,52	11,62 »	,0996	9,5 »	,0126	,0126	Fabriksmaaling.
							12570	9,97	11,55 »	,0987	33,9 »	,0204	,0204	

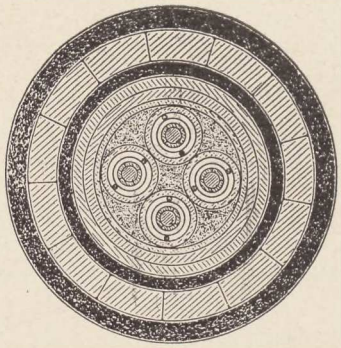
Værdier i Parentes ( ) er kun skønnede, ikke maalte. For Guttaperka er sat $\frac{A}{C} = 120 \cdot \frac{\omega}{5000}$, for imprægneret Papir $\frac{A}{C} = 100 \cdot \frac{\omega}{5000}$.

[1]) Alle Opgivelser for dette Kabel er pr. km Enkeltledning.

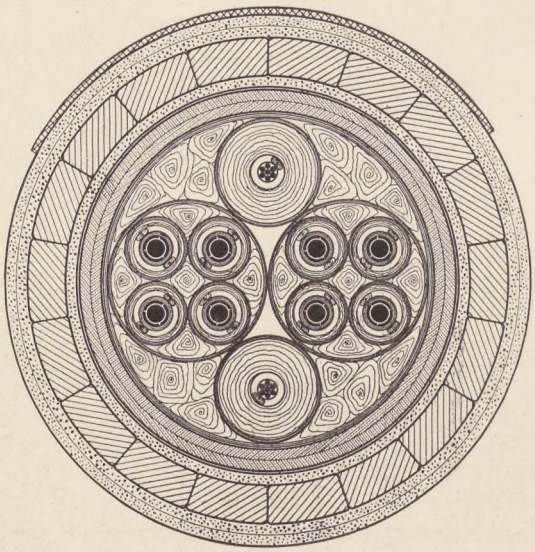
[2]) VIII. 4-ledet Telefonkabel. 1914.
Sjælland—Fyen—Jylland.



V. 1-ledet Telefonkabel 1907. Sjælland—Nekselø og Skalø—Vejrø.



VI. 4-ledet Telefonkabel 1907. Lolland—Fehmern.



VII. 10-ledet Telefonkabel 1909. Sjælland—Samsø—Jylland.

Alle de viste Kabeltværsnit er i sand Størrelse.

TRYKFEJL.

S. 38 Linie 1 fra oven rettes til $\frac{Z_1}{Z_2} = r \cdot e^{j\varphi}$

- 45 Tælleren i Formel (89) rettes til $e^{-\gamma x} + r \cdot e^{-\gamma(2l-x)}$

- 47 Formlen for v_l rettes til $v_l = e \cdot \frac{e^{-\gamma l}}{2}$

- » I Formel (102) for P skal E_m opløftes til anden Potens.

Dansk Ingeniørforening
Bogsamling.

Dansk Ingeniørforenings
Bogsamling.